МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский государственный академический
институт живописи, скульптуры и архитектуры имени И. Е. Репина
при Российской академии художеств

Я. С. ВОРОЖИЩЕВ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПОСТРОЕНИЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ И ИНЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Методические указания

Часть I

Санкт-Петербург
2019

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного академического института живописи, скульптуры и архитектуры имени И. Е. Репина при Российской академии художеств

Рецензент
Д. В. Волошинов,
доктор технических наук,
заведующий кафедрой информатики и компьютерного дизайна
Санкт-Петербургского государственного университета
телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

На обложке: иллюстрация книги Ганса Вредемана де Вриса «Перспектива», 1604

ISBN 978-5-903677-66-5

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для студентов творческих факультетов художественных вузов. Некоторые разделы могут представлять интерес и для обучающихся по другим специальностям, связанным с необходимостью построения наглядных изображений.

Как это ни покажется странным на первый взгляд, художнику необходимы более обширные познания в теории изображений, нежели инженеру или архитектору. Инженеры в основном используют ортогональные и аксонометрические проекции. Архитекторы дополнительно должны уметь строить перспективные проекции, а также тени и отражения.

Художники кроме всего этого должны иметь представление о нелинейной, обратной и объемной перспективе, знать законы отражения и преломления света и уметь строить не только отраженные, но и преломленные изображения, линейные и нелинейные.

Например, простейший натюрморт, включающий в себя прозрачный сосуд с водой и какой-либо предмет с криволинейной зеркальной поверхностью, потребует от художника знания принципов формирования нелинейных отражений и преломлений.

Для грамотного художника не лишним будет и знание законов разложения, рассеивания, поглощения, дифракции и интерференции света, так как эти явления достаточно часто встречаются в природе. В художественной практике могут оказаться полезными и некоторые сведения о многомерных пространствах, теории графов, топологии, теории множеств и т. д. И хотя давно минули времена Ренессанса, когда многие художники были одновременно и одними из самых образованных людей своего времени, стремиться к этому, безусловно, следует.

С учетом специфики работы живописцев и скульпторов большое внимание в методических указаниях уделено методам, позволяющим строить изображения непосредственно на картине. Предлагаемый в большинстве учебников метод построения перспективных изображений по двум ортогональным проекциям малопригоден для художников, так как они, как правило, не имеют чертежей изображаемого объекта. Дополнительно рассмотрен ряд вопросов, которые недостаточно или совсем не освещены в имеющейся учебной литературе.

В настоящее время существует много компьютерных методов построения самых разнообразных изображений, как плоскостных, так и объемных. Современные технологии фотосъемки и сканирования позволяют получить двумерное или объемное (трехмерное) изображение практически любого реального объекта. По этой причине умение строить подобные изображения вручную отходит на второй план даже для художников.

Но не следует забывать, что и компьютер, и фотокамера, и сканер, и двумерный или трехмерный принтер – это всего лишь инструменты. Несравненно более совершенные, нежели линейка или циркуль, но инструменты. Мало уметь пользоваться инструментами, главное – представлять цель и результат их применения. Древняя мудрость «Мысль должна идти впереди кисти» справедлива по отношению к любым инструментам.

Доступный и динамичный мир виртуальных изображений зачастую создает у пользователя иллюзию всезнайства и всемогущества, но это всего лишь иллюзия. Человек, умеющий пользоваться компьютером, сканером и фотоаппаратом, но не имеющий познаний в теории изображений, во многом подобен неграмотному, который может видеть и воспроизводить любой текст, но не понимает его смысла.

Тем большее значение приобретает знание фундаментальных законов и принципов формирования изображений. Человечество на протяжении всей своей истории видело мир в перспективной проекции, не осознавая этого. Изучение и понимание законов формирования изображения началось лишь в эпоху Ренессанса, продолжается до настоящего времени и продолжится в будущем.

Геометрические познания никоим образом не могут препятствовать свободному полету фантазии, а, напротив, могут подсказать художественное решение, которое без этих познаний просто никогда не пришло бы в голову. Сознательно и грамотно использовать или нарушать геометрические законы может лишь человек, в них сведущий.

При этом следует отчетливо представлять, что любая теория или модель никогда полностью не адекватна реальности. Отношение между реальностью и теорией примерно такое же, как между подлинником и копией. Копия может сколь угодно точно отображать подлинник, но никогда не станет подлинником. Всегда при более глубоком анализе будут выявляться различия между ними. Точно так же любая теория имеет ограниченную область приложения, за пределом которой она уже не соответствует реальности и перестает работать.

По этой причине художнику не рекомендуется всегда и во всем слепо и неукоснительно следовать теории, но можно и до́лжно вносить в произведение некие коррективы, обусловленные собственной индивидуальностью и поставленной целью.

I. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРОЕКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ

Обычно к проекционным изображениям относят ортогональные, аксонометрические, перспективные и картографические проекции. Но более обобщенная трактовка этого понятия охватывает куда более широкий круг изображений. Тени, отражения, преломления, рельеф и даже круглая скульптура также могут рассматриваться как проекционные изображения и формироваться по единым геометрическим законам.

Все многообразие проекционных изображений, традиционно используемых художниками, можно разделить на двумерные и трехмерные. Все, конечно, слышали и про многомерные пространства, но мало кто представляет, что это такое. Проекционный метод позволяет дать многомерным пространствам простую и наглядную интерпретацию и даже использовать многомерные представления в художественной практике.

Двумерные изображения формируются на плоскости или иной двумерной поверхности (цилиндрической, сферической и т. д.). Поверхность, на которой формируется (проецируется) изображение, принято называть картинной поверхностью или просто картиной. Обычно двумерная картина используется для изображения двумерных или пространственных трехмерных объектов, но в принципе на двумерную картину может быть отображен (спроецирован) объект любой конечной размерности.

К трехмерным изображениям относятся рельефные и скульптурные изображения, а также сценическая перспектива. В этом случае в качестве картины выступает часть трехмерного пространства, ограниченная размером скульптуры, глубиной рельефа или глубиной сцены. На это картинное пространство, определенным образом деформированное, также могут быть отображены реальные трехмерные или абстрактные многомерные объекты.

1.1. Линейные геометрические множества

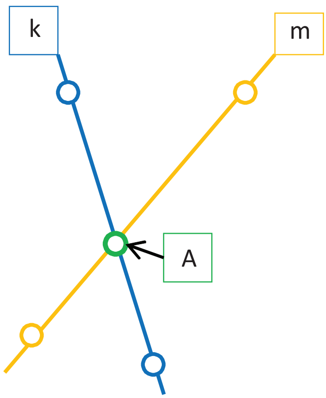
Элементарные геометрические образы: точки, прямые, плоскости, трехмерные пространства, многомерные пространства – принято называть линейными геометрическими образами или линейными множествами. Эти образы в различных сочетаниях могут образовывать самые разнообразные геометрические множества (образы, объекты), обладающие теми или иными свойствами. Любой геометрический объект представляет собой сочетание множества точек, плоскостей и т.д.

Геометрические множества, или образы (объекты), могут находиться между собой в различных количественных или позиционных отношениях. Отношения равно, больше, меньше, длиннее, короче и т.д. называют количественными или метрическими. Отношения тождества, принадлежности, включения, пересечения, непересечения – позиционными отношениями.

В школьном курсе геометрии принято считать, что на плоскости существуют всего два вида линейных геометрических образов: точки и прямые. Но если прямая может рассматриваться как бесчисленное множество точек, принадлежащих этой прямой, то через точку также можно провести бесчисленное множество прямых. Такое множество называют пучком прямых, и это множество также является линейным множеством. Если точка принадлежит множеству точек прямой, то и прямую можно рассматривать как принадлежащую множеству прямых пучка.

Множественный подход позволяет дать несколько иную интерпретацию привычным (евклидовым) геометрическим представлениям. Пересечением двух множеств является некоторое третье множество, принадлежащее одновременно двум данным. Например, пересечением двух прямых на плоскости является точка, которая принадлежит обеим данным прямым. С равным успехом прямую, проходящую через две точки можно рассматривать как пересечение двух множеств прямых, проходящих через эти точки (пересечение двух пучков прямых).

На *рис. 1.1.1a* изображены две прямые m, k, пересекающиеся в точке A. На *рис. 1.1.1b* показаны два пучка прямых M, K, пересекающиеся по прямой a. Символически эти отношения между геометрическими множествами могут быть представлены в простой единообразной форме: $k \cap m \equiv A$, $K \cap M \equiv a$. Здесь символы $\cap$ и $\equiv$ означают пересечение и тождество. Еще раз подчеркнем, что под пересечением K и M следует понимать не пересечение двух точек, но пересечение двух множеств прямых, проходящих через эти точки. Прямая a принадлежит одновременно обоим множествам (пучкам) и, следовательно, является их пересечением.



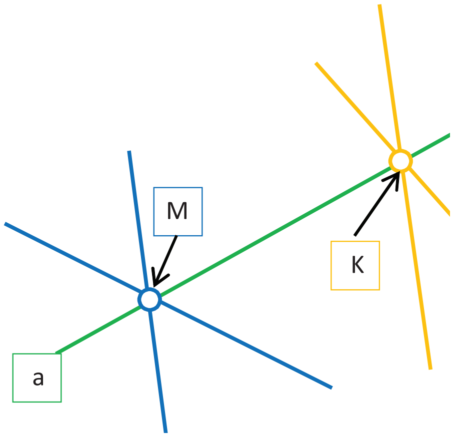


Рис. 1.1.1a, 1.1.1b

Формальное выражение этого отношения множеств представлено в виде тождества. В левой части тождества записывается операция (в данном случае пересечение), а в правой – результат этой операции.

Как будет показано далее, таким образом в символической форме можно записать любой геометрический позиционный алгоритм, не привязываясь к какой-либо системе координат.

В трехмерном пространстве к точке и прямой добавляется еще один элементарный линейный образ – плоскость. По этой причине количество линейных множеств также увеличивается. Появляется множество плоскостей, проходящих через одну прямую, – *пучок плоскостей*. Через точку трехмерного пространства проходит не только множество прямых, но и множество плоскостей. Такое множество называется *связкой прямых и плоскостей*.

На *рис. 1.1.2a* показано пересечение прямой k с плоскостью α в трехмерном пространстве. Результатом такого пересечения является точка A. Символически: $k \cap \alpha \equiv A$.

На *рис. 1.1.2b* показано пересечение пучка плоскостей k и связки плоскостей A. В результате этого пересечения получаем плоскость α (выделена зеленым цветом), принадлежащую одновременно и пучку, и связке плоскостей. Символически эту операцию можно записать в виде: $k \cap A \equiv \alpha$.

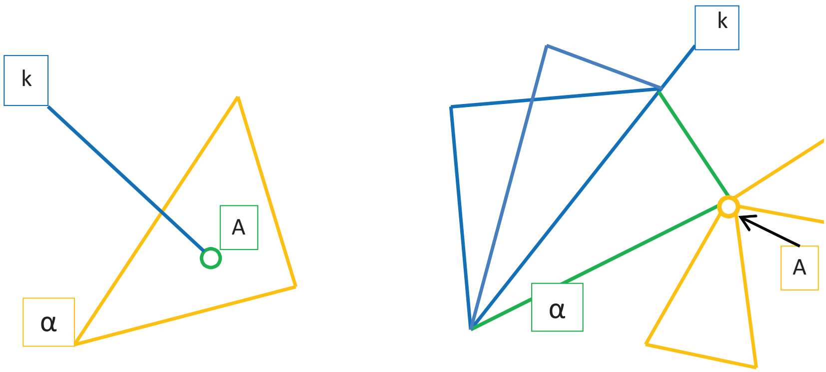


Рис. 1.1.2a, 1.1.2b

Отметим, что если при традиционном подходе две точки определяют прямую и на плоскости, и в трехмерном, и в многомерном пространстве, то при множественной интерпретации это будет иметь место только на плоскости при пересечении двух пучков прямых. Пересечением двух связок прямых и плоскостей в трехмерном пространстве будет не прямая, а пучок плоскостей (множество плоскостей, проходящих через прямую). Прямая в трехмерном пространстве получается в результате пересечения двух плоскостей или при пересечении двух связок прямых.

Рассмотренный множественных подход можно совершенно формально распространить и на многомерные пространства. Например, в четырехмерном пространстве через точку проходит не только множество прямых и плоскостей, но и множество трехмерных пространств (связка прямых, плоскостей и трехмерных пространств). Пересечением двух таких связок будет множество плоскостей и трехмерных пространств, принадлежащих одной прямой (пучок плоскостей и трехмерных пространств) и т. д.

Геометрические множества состоят из бесчисленного количества элементов. Например, прямая, и даже ее отрезок, содержат бесчисленное количество точек, через точку можно провести бесчисленное множество прямых и т.д. Используемые для сравнения конечных множеств отношения «больше», «меньше», «равно» неприемлемы по отношению к бесконечным множествам. Для сравнения таких множеств используется понятие размерности множества.

Под размерностью бесконечного множества традиционно понимают число параметров (координат), необходимых для выделения одного элемента этого множества. Так, для выделения точки на прямой достаточно указать один параметр (координату), на плоскости – два, в пространстве – три. В данном случае элементом множества является точка. По этой причине точку принято считать нульмерным множеством, прямую – одномерным, а пространство – трехмерным множеством точек. Теоретически можно сконструировать точечные пространства любой положительной и даже отрицательной размерности.

Элементом геометрического множества может быть не только точка, но и любой другой геометрический образ. Например, в пучке прямых элементом множества является не точка, а прямая.

Размерность множества, составленного из иных, отличных от точки элементов, может быть установлена либо непосредственно, либо сравнением с множеством, размерность которого известна. Если между элементами двух множеств можно установить взаимно однозначное соответствие (элементу одного множества соответствует единственный элемент другого множества и обратно), то размерности этих множеств равны.

Например, каждая прямая пучка пересекается с произвольной прямой на плоскости в единственной точке и обратно: каждой точке этой прямой соответствует единственная прямая пучка. Следовательно, размерности этих множеств равны и равны единице. Аналогичным образом можно установить, что множество прямых и плоскостей трехмерной связки двумерно, так как элементы этого множества пересекаются с плоскостью по двумерным множествам точек и прямых и т.д.

1.2. Многомерные пространства

Относительно многомерных пространств бытует устоявшееся мнение, как о чем-то невероятно сложном и недоступном для понимания и представления. Проекционный метод позволяет не только дать многомерным пространствам простую и наглядную интерпретацию, но даже использовать многомерность как художественный прием.

Сложность восприятия многомерных пространств во многом чисто психологическая. В реальности не существует ни точек, ни прямых, ни плоскостей и т.п. Все это лишь абстрактные геометрические понятия. Тем не менее мы легко воспринимаем эти абстракции, так как можем соотнести их с реальными привычными объектами. Трехмерная евклидова геометрия соответствует, как нам кажется, жизненному опыту и здравому смыслу.

Многомерная геометрия, напротив, не соответствует нашим привычным представлениям. В доступной реальности нет ничего похожего. Но следует всегда помнить, что, во-первых, воспринимаемая нами реальность составляет ничтожную часть от существующей, а во-вторых, абстрактная теория никогда полностью не соответствует практике и может выходить за пределы доступной реальности.

Чтобы проще прийти к пониманию многомерности, не следует полагаться на так называемое пространственное воображение, которое у большинства людей трехмерное. Такое воображение в данном случае ничем помочь не может, а только мешает. То, что принято называть пространственным воображением, не есть нечто врожденное, абсолютное и незыблемое. Оно во многом индивидуально и зависит от способностей, жизненного опыта и познаний человека. Следовательно, при желании можно развить в себе и многомерное пространственное воображение.

Проиллюстрировать многомерность можно при помощи простых графических диаграмм, состоящих из точек (вершин) и соединяющих их прямых или кривых линий (ребер).

Такие диаграммы принято называть *графами*. Произвольный граф может состоять из любого количества вершин и ребер, соединяющих вершины в произвольном порядке. Граф, в котором каждая вершина соединена со всеми остальными вершинами, называется *полным*. Граф, являющийся частью какого либо графа, называется его *подграфом*.

На *рис. 1.2.1* последовательно изображен ряд полных графов, соответствующих пространствам размерности от 0 до 5.

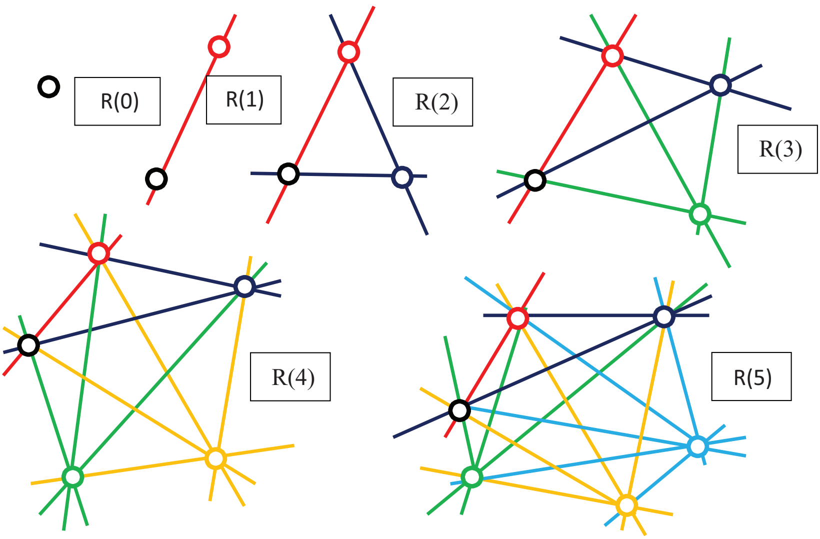


Рис. 1.2.1

Граф, состоящий из одной вершины, соответствует 0-мерному пространству $R(0)$ (точка). Граф, состоящий из двух вершин и одного ребра, соответствует одномерному пространству $R(1)$ (прямая). Граф, состоящий из трех вершин и трех ребер, соответствует двумерному пространству $R(2)$ (плоскость) и т. д.

Непосредственно из рисунка видно, что каждое последующее пространство образуется из предыдущего добавлением одной точки, не принадлежащей предыдущему пространству. Эта точка соединяется ребрами со всеми остальными. Если обозначить размерность пространства $R(n)$, где n – величина размерности, то эта величина всегда равна числу ребер соответствующего полного графа, принадлежащих одной вершине. Число вершин V всегда на единицу больше размерности пространства $V=(n+1)$. Число ребер L определяется равенством $L=[n(n+1)]/2$, или $L=[(V-1)V]/2$.

Граф, соответствующий трехмерному пространству $R(3)$, можно трактовать как изображение (проекция на плоскость) тетраэдра, состоящего из 4 вершин, 6 ребер и 4 граней. Такая трактовка не вызывает никаких вопросов, так как мы привыкли воспринимать плоские изображения как объемные.

Но если трехмерный объект может быть спроецирован на плоскость, то с равным успехом на плоскость может быть спроецирован и многомерный объект. Например, граф, соответствующий четырехмерному пространству, можно трактовать как проекцию четырехмерной структуры на плоскость. Эта структура состоит из 5 вершин, 10 ребер, 10 граней и 5 трехмерных пространств.

В общем случае для полного графа, состоящего из V вершин, количество его подграфов (подпространств), содержащих v вершин, может быть вычислено по формуле:

$$N = V! / [(V-v)!\ v!] \tag{1.2.1}$$

Если в графе трехмерного пространства выделить два двумерных подграфа, то они всегда будут иметь общее ребро. Подграфы, соответствующие прямой и плоскости, будут иметь общую вершину. Эти результаты соответствуют тому, что в трехмерном пространстве две плоскости пересекаются по прямой, а прямая и плоскость пересекаются в точке.

Аналогично, если в четырехмерном графе выделить плоскость и трехмерное пространство, то можно установить, что они пересекаются по прямой, две плоскости пересекаются в точке и т. д. Этот алгоритм применим к пространству любой размерности.

Как следует из приведенной схемы, через точку можно провести не только прямые или плоскости (одномерные и двумерные пространства), но и бесчисленное множество пространств любой конечной размерности.

Рассмотренная графическая интерпретация многомерных пространств может иметь и практическое, и художественное приложение.

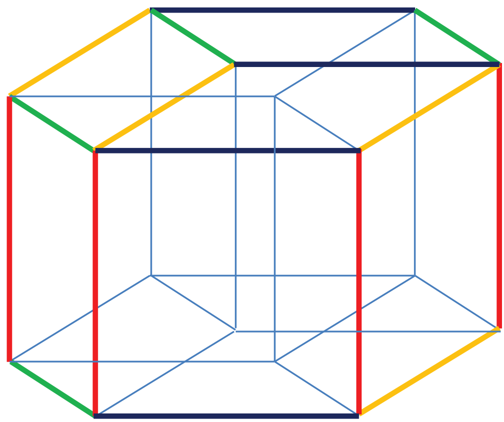


Рис. 1.2.2

На *рис. 1.2.2* изображена аксонометрическая проекция четырехмерного куба. В каждой вершине такого куба сходится по 4 ребра. Если принять какую-либо вершину за начало координат, а ребра за единичные отрезки по осям координат, то на этой модели можно решать любые четырехмерные задачи аналогично тому, как это делается на аксонометрической проекции трехмерного куба.

Добавляя новые координатные направления (оси), можно изобразить куб любой размерности. Следует отметить, что название четырехмерный или *n*-мерный куб весьма условно. С равным основанием трехмерный куб можно назвать трехмерным квадратом, квадрат – двумерным отрезком, отрезок – одномерной точкой и т.д.

К многомерным изображениям может быть применена тональная, теневая и цветовая моделировка, также как это делается с плоскими изображениями трехмерных объектов. Восприятие плоских изображений как многомерных есть исключительно вопрос привычки.

Шкала размерностей геометрических пространств (множеств) отличается от обычной числовой шкалы тем, что началом отсчета на ней служит не 0, а пустое множество, имеющее размерность –1.

$$\ldots -6, -5, -4, -3, -2, (-1), 0, 1, 2, 3, 4\ldots$$

Теоретически эта шкала может быть продолжена до бесконечности как в положительной, так и в отрицательной области значений размерностей. Соответствующие пространства положительной и отрицательной размерности расположены симметрично относительно начала отсчета. Точке $R(0)$ соответствует минус-точка $R(-2)$, прямой $R(1)$ – минус-прямая $R(-3)$ и т.д.

Диаграммы на *рис. 1.2.1* позволяют дать для отрицательной размерности очень простую интерпретацию. Если в трехмерном графе выделить два одномерных подграфа, то эти подграфы могут и не пересекаться. В этом случае их пересечением является пустое множество размерности $R(-1)$. Если две прямые выделить в четырехмерном графе, то они не только не будут пересекаться, но в четырехмерном графе останется одна свободная вершина, не принадлежащая данным подграфам. Эту вершину относительно операции пересечения можно трактовать как минус точку $R(-2)$ и т.д.

Если n – размерность данного (относительного) пространства, k, h – размерности пересекающихся пространств, то p – размерность пространства их пересечения – определяется уравнением:

$$p = k + h - n \qquad (1.2.2)$$

Многомерная и отрицательная интерпретация пространств позволяет придать этой формуле смысл при любых значениях входящих в нее параметров.

В общем случае геометрическое пространство следует полагать бесконечномерным. Любое пространство конечной размерности можно рассматривать как некоторое сечение бесконечномерного пространства.

1.3. Операция линейного проецирования

В наиболее общей трактовке под проекцией понимают отображение по какому-либо правилу одного множества на другое. Отображение может быть взаимно однозначным, если элементу одного множества соответствует единственный элемент другого множества и обратно. Если элементу одного множества соответствует не элемент, но некоторое множество элементов другого множества (подмножество), то такое отображение является неоднозначным.

При проецировании некоторые свойства объекта изменяются, а некоторые остаются неизменными. Свойства, которые остаются неизменными, называют инвариантными относительно данных преобразований.

Геометрический проекционный аппарат, с помощью которого осуществляется операция проецирования (отображения) некоторого объекта, состоит из проекционного и картинного множеств. Пересечение элементов проекционного множества с картинным множеством формирует на картине некоторое проекционное изображение объекта. Выбор проекционного и картинного множеств может быть совершенно произвольным и обусловлен только поставленной задачей.

Операция проецирования позволяет установить соответствие между множеством точек реального или абстрактного пространства и множеством точек картинного пространства, иными словами, получить на картине изображение реального или абстрактного объекта.

Простейшим и наиболее распространенным проекционным аппаратом является аппарат линейного проецирования. В случае линейного проецирования проекционное множество представляет собой пучок прямых на плоскости или связку прямых и плоскостей в трехмерном пространстве. Картинным множеством на плоскости является прямая. В трехмерном пространстве картиной является плоскость. Точку, из которой осуществляется проецирование, принято называть центром проецирования или точкой зрения.

Например, в знакомом всем фотографическом или электронном процессе получения изображений центром проецирования является объектив прибора, а картиной – его световоспринимающая поверхность. За последние два столетия уровень и качество световоспринимающих поверхностей кардинально изменились, но принцип оптического проецирования остался неизменным.

Человеческий глаз устроен по аналогичному принципу. Центром проецирования является хрусталик глаза, а картиной – глазное дно. Несмотря на то, что хрусталик формирует перевернутое изображение, а глазное дно представляет собой вогнутую поверхность, мы воспринимаем полученную картину адекватно реальности вследствие жизненного опыта и работы мозга. По этой причине при создании произведения, предназначенного для визуального восприятия, следует учитывать и оптическую систему глаза, которая у всех едина, и менталитет зрителя, который может различаться.

Плоский и трехмерный аппараты проецирования схематически изображены на *рис. 1.3.1a* и *рис. 1.3.1b*. Картинные множества выделены красным, проекционные множества – синим. В первом случае множество точек плоскости проецируется на прямую, а во втором – множество точек трехмерного пространства проецируется на плоскость.

В общем случае при двумерном или трехмерном линейном проецировании на прямую или плоскость проекцией прямой линии является также прямая. Прямая, проходящая через центр проецирования, проецируется в точку.

При линейном проецировании метрические отношения в большинстве случаев не сохраняются. Проекции отрезков и проекции углов между прямыми (при трехмерном проецировании) могут быть как больше, так и меньше реальных.

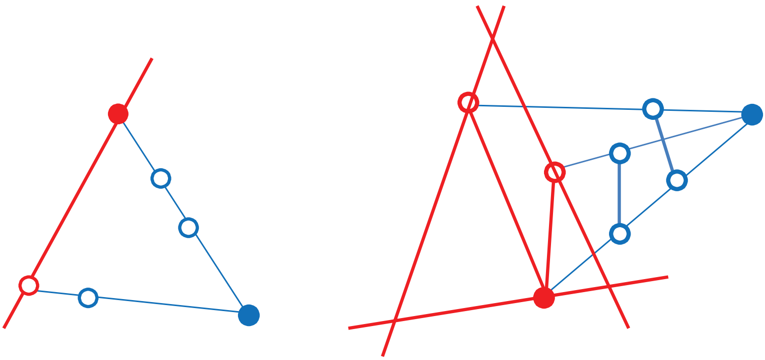


Рис. 1.3.1a, 1.3.1b

Позиционные отношения (тождество, принадлежность, включение, пересечение) между геометрическими образами при проецировании сохраняются. Например, если две прямые в трехмерном пространстве пересекаются, то и проекции этих прямых на плоскости также пересекаются. В специальной литературе свойства, остающиеся неизменными при тех или иных преобразованиях, принято называть инвариантными относительно данных преобразований. Используя этот термин, можно сказать, что позиционные отношения между геометрическими множествами инвариантны относительно операции линейного проецирования.

Вследствие неоднозначности операции проецирования обратное утверждение не имеет места. Пересекающимся на плоскости проекциям прямых могут соответствовать как пересекающиеся, так и скрещивающиеся (непересекающиеся) прямые трехмерного пространства.

На *рис. 1.3.1b* показаны две непересекающиеся (скрещивающиеся) прямые трехмерного пространства, проекции которых на плоскости пересекаются (точка пересечения проекций выделена сплошной заливкой). Точке пересечения проекций в данном случае соответствуют не одна, а две точки в пространстве, принадлежащие различным прямым.

Отсюда следует, что проецирование плоскости на прямую и трехмерного пространства на плоскость из одного центра не является однозначным. Все точки плоскости или трехмерного пространства, лежащие на проецирующей прямой, проецируются в одну и ту же точку. Это происходит из-за разности размерностей проецируемого и картинного множеств. В первом случае двумерное множество точек плоскости проецируется на одномерное множество точек прямой, а во втором – трехмерное пространственное множество точек проецируется на двумерное множество точек плоскости.

Чтобы устранить эту неоднозначность используют так называемый метод двух или более проекций (изображений).

Сущность метода состоит в том, что проецирование осуществляется из двух или более центров на одну или более картин и каждая точка имеет не одну, а две или более проекций. Этот метод широко используется в инженерной графике, когда трехмерный объект изображается в двух или более ортогональных проекциях (видах), что позволяет по плоскому изображению представить и изготовить трехмерный материальный объект.

Следует отметить, что число проекций всегда равно числу центров проецирования, но картина, на которую осуществляется проецирование, может быть и одной независимо от количества центров проецирования. Исключительно из соображений удобства восприятия количество картин обычно назначают равным количеству центров проецирования.

Принцип нескольких изображений имеет место и в природе. Большинство животных имеют по меньшей мере два глаза, что дает возможность рассматривать близкий объект одновременно как минимум с двух точек зрения. Это позволяет на основании двух или более двумерных изображений получить более полную метрическую картину реального трехмерного пространства.

На *рис. 1.3.2a* и *1.3.2b* представлены принципиальные схемы методов построения двух изображений для плоскости и для трехмерного пространства. На первом рисунке произвольная точка плоскости проецируется из двух центров (выделены сплошной синей заливкой) на две картинные прямые (красные) и имеет по одной проекции на каждой прямой. Проецируемая точка показана синим, а две ее проекции – красными кружками. Сплошной красной заливкой показаны точки пересечения прямой, проходящей через центры проецирования с картинами.

Обратно, если на картинных прямых задать произвольную пару точек, то, соединив эти точки с центрами проецирования, на пересечении проецирующих прямых получим единственную точку плоскости.

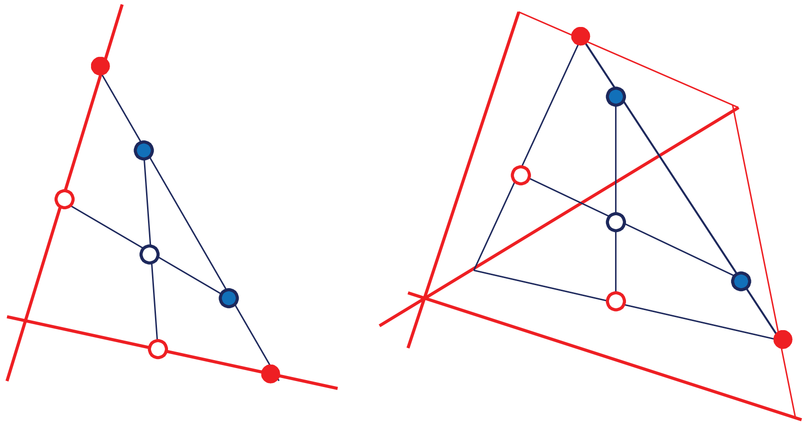


Рис. 1.3.2a, 1.3.2b

Таким образом устанавливается однозначное соответствие между множеством точек плоскости и множеством пар точек на картинных прямых. Размерности этих множеств равны, так как для задания точки на прямой требуется один параметр, а для задания двух точек – два параметра. Элементом одного множества является точка, а элементом другого – пара точек. Лишний раз подчеркнем, что в принципе элементом множества может быть все что угодно.

На *рис. 1.3.2b* точка трехмерного пространства проецируется из двух центров на две плоскости. Так как два центра проецирования и заданная точка определяют плоскость, то пары проекций лежат на прямых, по которым эта проецирующая плоскость пересекает картинные плоскости (линии связи). Для задания такой пары проекций требуется три параметра: два – для задания произвольной точки на одной из картинных плоскостей и один – для задания точки на прямой пересечения проецирующей плоскости с другой картинной плоскостью (на линии связи). Следовательно, и в этом случае имеет место однозначное соответствие между трехмерным множеством точек и трехмерным множеством пар проекций точек на картинные плоскости.

В приведенном примере центры проецирования принадлежат противоположным картинным прямым или плоскостям, но это не обязательно, и центры могут быть назначены совершенно произвольно.

Внимательный читатель может обратить внимание на то, что все точки, лежащие на прямой, проходящей через центры проецирования (исключенная прямая), проецируются в одну и ту же пару точек. Устранить это исключение можно заданием третьего центра проецирования и третьей картинной прямой или плоскости. Но обычно бывает достаточно двух проекций.

1.4. Бесконечно удаленные элементы

Всем известен и привычен тот факт, что на перспективном изображении параллельные прямые, уходящие вдаль, выглядят сходящимися и пересекаются на линии горизонта. Этот парадокс долгое время безуспешно пытались разрешить и согласовать с евклидовой геометрией, где параллельные прямые не имеют точки пересечения. В XVIII в. французский геометр и архитектор Жерар Дезарг предложил дополнить прямую особой бесконечно удаленной точкой и считать, что параллельные прямые пересекаются в этой точке. Но, несмотря на это, перспективную геометрию попрежнему продолжали считать специальным разделом геометрии евклидовой. И только после работ Лобачевского, доказавшего, что кроме евклидовой могут существовать и иные геометрии, была окончательно признана самостоятельность перспективной, или, как ее чаще называют, проективной геометрии.

Проективная геометрия отличается от евклидовой только одной аксиомой о параллельных прямых. В евклидовой геометрии все прямые, лежащие в плоскости, пересекаются, за исключением параллельных прямых, которые не имеют точки пересечения. Таким образом, на плоскости в теории Евклида в отношении пересечения прямых существует исключение в виде параллельных прямых. В евклидовом трехмерном пространстве все плоскости пересекаются по прямой, кроме параллельных плоскостей, которые не пересекаются.

В проективной геометрии все прямые, лежащие в плоскости, равноправны и пересекаются в собственной или бесконечно удаленной точке. При этом бесконечно удаленная точка рассматривается как совершенно равноправная со всеми остальными. При помощи операции проецирования бесконечно удаленная точка всегда может быть представлена как собственная, и обратно: любая собственная точка может быть спроецирована в бесконечно удаленную точку.

Точно так же в трехмерном проективном пространстве параллельные плоскости пересекаются по бесконечно удаленной прямой. На перспективном изображении линия горизонта есть не что иное, как проекция бесконечно удаленной прямой на картинную плоскость. Все точки этой прямой являются бесконечно удаленными и, следовательно, все прямые, сходящиеся в какой-либо точке на линии горизонта, параллельны.

Таким образом, если в проективном пространстве прямая дополняется бесконечно удаленной точкой, плоскость – бесконечно удаленной прямой, то и трехмерное пространство дополняется бесконечно удаленной плоскостью, которой принадлежат все бесконечно удаленные точки и прямые трехмерного пространства.

Теоретически эта последовательность может быть продолжена до бесконечности. Четырехмерное пространство дополняется бесконечно удаленным трехмерным пространством, пятимерное – четырехмерным и т. д.

Происхождение самой идеи о бесконечно удаленных элементах непосредственно связано с операцией линейного проецирования. Рассмотрим перспективное (проекционное) соответствие точек на двух прямых *(рис. 1.4.1)*. Если на плоскости задать произвольную пару прямых m_1, m_2 и произвольную точку S, не принадлежащую этим прямым (пучок прямых с вершиной в точке S), то тем самым устанавливается перспективное однозначное соответствие между точками заданных прямых. Любая прямая пучка S пересекает каждую из заданных прямых в единственной точке. Пары точек, лежащие на одной проецирующей прямой, являются перспективно соответственными. Иначе можно сказать, что множество точек одной прямой проецируется (отображается) на множество точек другой прямой и обратно из центра проецирования S. Следовательно, любая из этих прямых может рассматриваться как картина, на которую проецируются точки другой прямой.

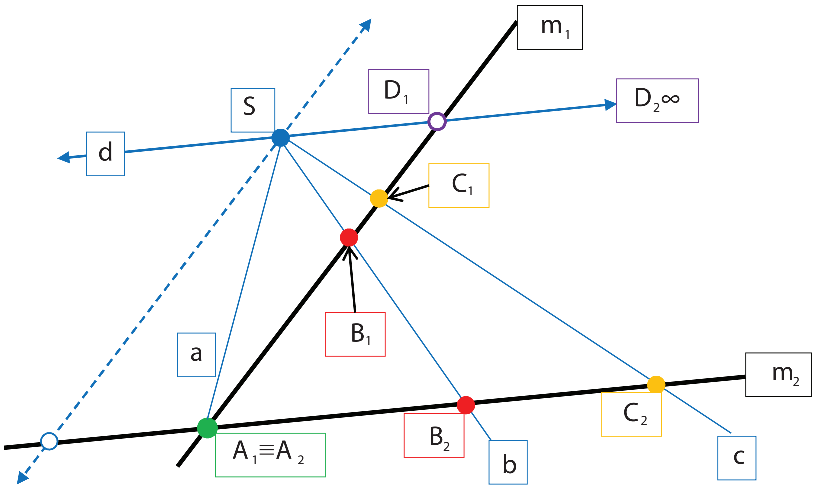


Рис. 1.4.1

На приведенном рисунке прямая b пересекает заданные прямые в соответственных точках $B_1 - B_2$, прямая c – в соответственных точках $C_1 - C_2$, прямая a проходит через тождественные точки $A_1 \equiv A_2$ и т. д. Соответственные точки выделены одинаковым цветом.

Таким образом, устанавливается однозначное перспективное соответствие между точками двух прямых: каждой точке одной прямой соответствует единственная точка другой и обратно.

Если оставаться на позициях евклидовой геометрии, то однозначное перспективное соответствие между точками нарушается в случае, если проецирующая прямая параллельна одной из заданных прямых (на рисунке прямая d параллельна m_2). Прямая d пересекает прямую m_1 в точке D_1, для которой с позиции евклидовой геометрии соответственной точки на прямой m_2 не существует, так как параллельные прямые не пересекаются.

Для устранения этого исключения и было предложено считать, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке. В этом случае точке D_1 будет соответствовать бесконечно удаленная точка $D_2\infty$, и однозначное перспективное соответствие между точками двух прямых не будет иметь никаких исключений.

Центр проецирования S можно задать как непосредственно, так и косвенным образом. Если на прямых m_1, m_2 задать произвольную пару соответственных точек B_1–B_2 и C_1–C_2, то тем самым будут заданы две прямые b, c, проходящие через соответственные точки. Пересечение этих прямых дает точку S.

Символически эту операцию можно записать следующим образом: $B_1 \cap B_2 \equiv b$, $C_1 \cap C_2 \equiv c$, $c \cap b \equiv S$. Если не присваивать промежуточным результатам самостоятельных обозначений, то запись сокращается $(B_1 \cap B_2) \cap (C_1 \cap C_2) \equiv S$.

Если точку пересечения прямых m_1, m_2, принадлежащую обеим прямым, считать тождественной парой соответственных точек $A_1 \equiv A_2$, то можно сделать вывод, что *перспективное соответствие между точками двух прямых устанавливается заданием трех пар соответственных точек*. Это положение является важнейшей и основной теоремой линейной перспективы.

В частности, на основании этой теоремы всегда можно установить соответствие между равномерной и перспективной шкалой измерений. Это позволяет производить измерения на перспективной шкале аналогично тому, как это делается на равномерной.

В приведенном примере одна пара точек была тождественной, что упрощало построение. Если ни одна из заданных пар точек не тождественна, то задачу можно свести к предыдущей переносом одной из прямых до совмещения какой-либо пары соответственных точек. Возможно и иное решение, показанное на *рис. 1.4.2*.

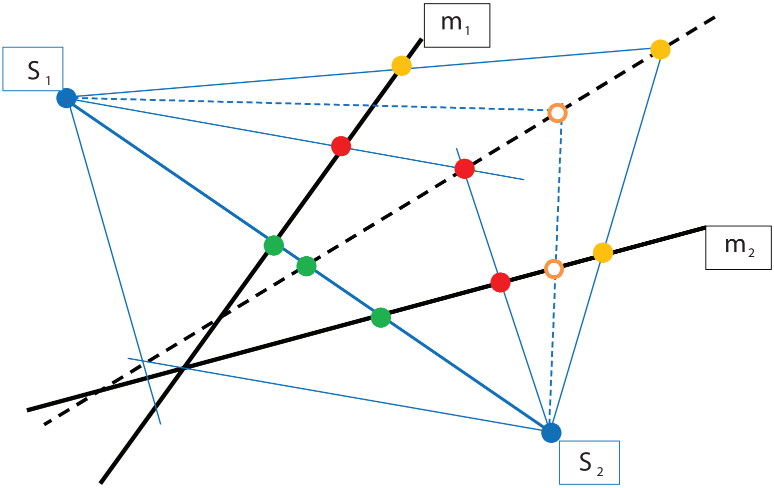


Рис. 1.4.2

На двух заданных прямых m_1, m_2 произвольным образом назначены три пары соответственных точек (зеленая, красная и желтая). Через любую пару соответственных точек проводится прямая (утолщенная синяя), на которой произвольно назначаются два центра проецирования S_1, S_2. Пересечение двух пар проецирующих прямых, проходящих через соответственные точки, дает две точки (красная и желтая), определяющих некоторую прямую (показана пунктиром). Эта прямая является перспективно соответственной для каждой из заданных прямых и служит как бы посредником между ними. Построение соответственных точек на заданных прямых сводится к двукратному решению предыдущей задачи. На рисунке пунктиром показано построение произвольной пары соответственных точек (выделены оранжевым). Следует обратить внимание, что в данном примере точка пересечения заданных прямых не является тождественной.

Идея дополнить бесчисленное множество точек на прямой еще одной бесконечно удаленной точкой может показаться совершенно незначительной, но это одна из величайших математических идей. По значению ее можно сравнить с идеей о дополнении числового ряда нулем, которая поначалу также казалась ничтожной, а затем изменила всю математику.

Бесконечно удаленные элементы позволили создать геометрическую теорию, по отношению к которой геометрия Евклида является частным случаем. Существуют и еще более универсальные теории, например, топология или теория множеств. По отношению к этим теориям частным случаем является проективная геометрия.

Никогда не следует полностью отождествлять реальность и математическую абстракцию. В свое время создатель первой неевклидовой геометрии Лобачевский назвал свою геометрию воображаемой в отличие от «реальной» евклидовой. Как показало дальнейшее развитие математики, геометрия Евклида ничуть не более реальна и ничуть не менее воображаема, нежели геометрия Лобачевского или любая другая неевклидова геометрия. В природе не существует ни точек, ни прямых, ни плоскостей, ни иных геометрических образов: все это лишь математические абстракции, более или менее соответствующие реальности и имеющие определенные ограниченные области приложения.

1.5. Коллинеации

Операция линейного проецирования устанавливает некоторое соответствие между элементами проецируемого множества и элементами его проекции. При этом в общем случае проекцией точки является точка, проекцией прямой – прямая, проекцией плоскости – плоскость и т. д.

Если проецируемое и картинное множества имеют одинаковую размерность, то между элементами этих множеств при линейном проецировании устанавливается взаимно однозначное соответствие. Так, при проецировании прямой на прямую каждой точке проецируемой прямой соответствует единственная точка картинной прямой и обратно. При проецировании плоскости на плоскость также имеет место однозначное соответствие между точками и прямыми этих плоскостей. При отображении трехмерного пространства на трехмерное (на рельефе или в сценической перспективе) точкам, прямым и плоскостям реального пространства соответствуют точки, прямые и плоскости картинного пространства.

Этот частный случай перспективного взаимно однозначного соответствия, при котором линейному геометрический образу (множеству) соответствует аналогичный линейный образ, называют *коллинейным соответствием* или просто *коллинеацией*. Коллинеации широко используются при построении перспективных и иных проекционных изображений.

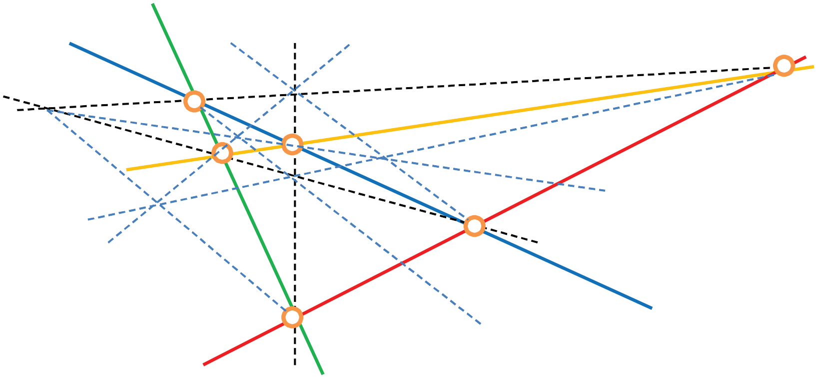


Рис. 1.5.1

Как было показано в п. 1.4, чтобы задать перспективное соответствие между точками двух прямых, достаточно произвольным образом задать три точки на одной прямой и три соответственные точки на другой. При реализации этого соответствия получаем плоскостную конструкцию (конфигурацию), состоящую из четырех прямых и шести точек *(рис. 1.5.1)*. Все точки и все прямые этой конструкции совершенно равнозначны: через каждую точку проходят 2 прямые и каждой прямой принадлежат 3 точки. Следовательно, любую из точек можно принять за центр проецирования, который устанавливает перспективное соответствие между точками двух прямых, не проходящих через избранную точку. Таким образом, данная конфигурация представляет собой координатную систему на плоскости.

В конфигурации имеются 3 пары точек, не лежащих на заданных 4 прямых. Соединив эти точки между собой, получаем еще 3 прямые (черный пунктир). Эти прямые пересекаются между собой в 3 точках, которые, в свою очередь, могут быть соединены с уже имеющимися (голубой пунктир). Продолжая этот процесс, можно построить бесчисленное количество точек и прямых. Каждая из прямых пересекается со всеми четырьмя изначально заданными прямыми и может быть однозначно определена заданием двух точек на каких-либо двух прямых. Любая точка плоскости может быть построена как пересечение двух прямых.

Рассмотренная конфигурация однозначно определяется заданием четырех произвольных прямых или четырех точек. При этом никакие три прямые не должны проходить через одну точку и никакие три точки не должны лежать на одной прямой.

Отсюда следует, что если на двух плоскостях произвольным образом задать четыре пары соответственных прямых или точек, то между всеми остальными точками и прямыми этих плоскостей устанавливается взаимно однозначное коллинейное соответствие. В частном случае плоскости могут совпадать, и тогда соответствие устанавливается между элементами одной плоскости (совмещенные пространства). Конфигурация из четырех точек называется четырехугольником, из четырех прямых – четырехсторонником. Обе конфигурации совершенно равнозначны, и от одной всегда можно перейти к другой.

Графическая реализация коллинейного соответствия на плоскости показана на *рис. 1.5.2*.

На плоскости заданы 4 пары соответственных прямых (два четырехсторонника). Соответственные прямые обозначены одним цветом. Соответственные точки лежат на пересечении соответственных прямых.

На рисунке показано построение произвольной пары соответственных точек. Для упрощения построений одна пара из заданных соответственных точек назначается тождественной. Это всегда может быть достигнуто перемещением одного из соответственных четырехсторонников до совмещения какой-либо пары соответственных точек.

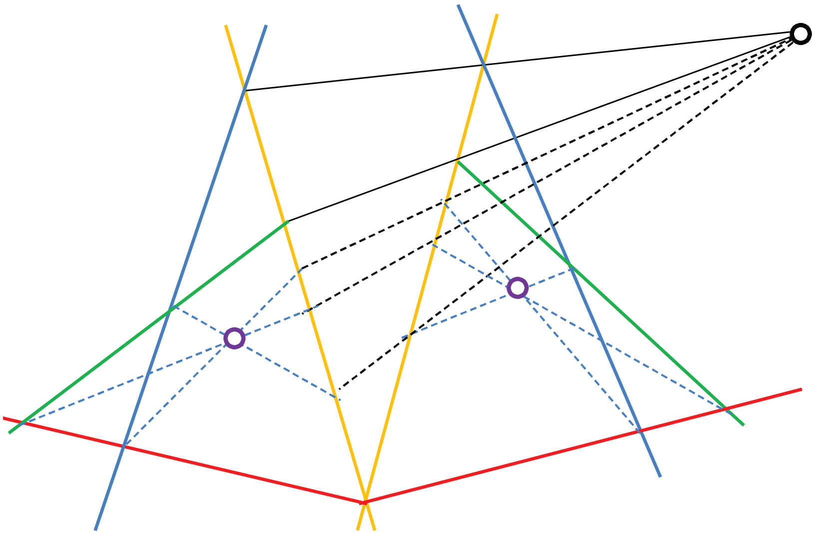


Рис. 1.5.2

По алгоритму, показанному на *рис. 1.4.1,* между точками двух соответственных прямых (желтые) устанавливается перспективное соответствие (центр проецирования выделен черным). Построение пары соответственных точек показано пунктиром. Соответственные (фиолетовые) точки лежат на пересечении трех соответственных прямых. На практике для построения достаточно любых двух из них.

Таким образом можно построить неограниченное количество пар соответственных точек. Следовательно, если на одной плоскости имеется какая-либо линия или рисунок, то на другой плоскости можно построить их перспективное соответствие.

Когда одна пара прямых в коллинеации является тождественной *(рис. 1.5.3)*, отпадает необходимость устанавливать перспективное соответствие между точками тождественной прямой, так как все ее точки тождественны. Этот частный случай перспективного соответствия на плоскости принято называть *гомологией* или *конфигурацией Дезарга*.

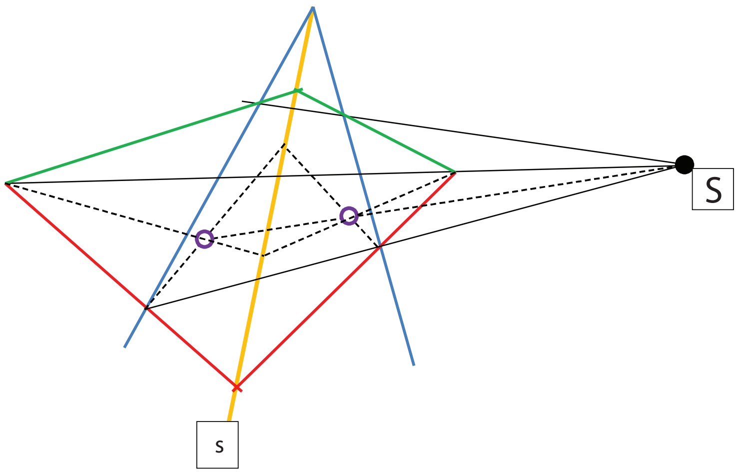


Рис. 1.5.3

В гомологии все соответственные прямые пересекаются на тождественной прямой (ось гомологии *s*), а все пары соответственных точек лежат на прямых, пересекающихся в одной точке (центр гомологии *S*). Отмеченные свойства значительно упрощают построение соответственных точек. По этой причине гомология широко используется при построении проекционных изображений. Известные всем со школьных времен геометрические преобразования: параллельный перенос, осевая и центральная симметрия – являются частными случаями гомологии, когда центр, или ось гомологии, или то и другое находятся в бесконечности.

На *рис. 1.5.4* показан способ задания гомологии четырьмя парами соответственных точек. Одна из соответственных пар назначается тождественной (центр гомологии *S*). Три остальные пары назначаются на прямых, проходящих через центр гомологии. Пересечение трех пар соответственных прямых дает три точки, лежащие на одной прямой (ось гомологии *s*). Голубым пунктиром показано построение произвольной пары соответственных точек.

Наиболее просто гомология может быть задана центром, осью и парой соответственных точек *(рис. 1.5.5)*. В этом случае для построения соответственных точек достаточно провести три линии.

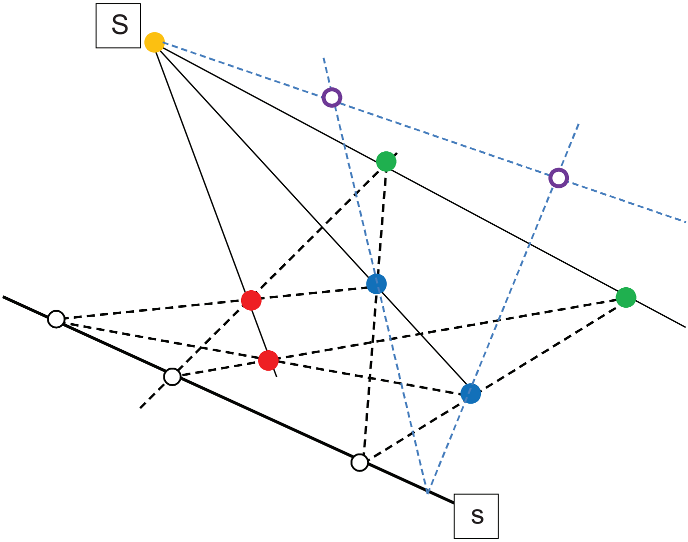


Рис. 1.5.4

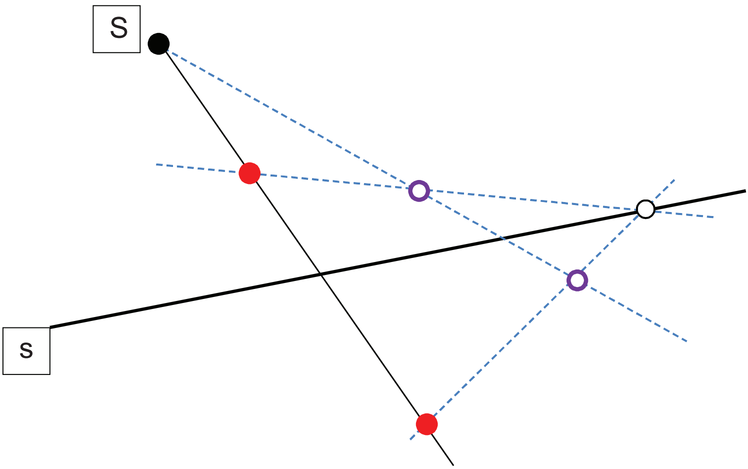


Рис. 1.5.5

Трехмерная коллинеация задается пятью парами соответственных плоскостей или точек. Трехмерная гомология может быть задана центром, тождественной плоскостью и парой соответственных точек. Этот метод будет использоваться далее при построении рельефной и сценической перспективы.

1.6. Геометрический принцип двойственности

Дополнение прямой бесконечно удаленной точкой позволяет установить на плоскости полное (без исключений) однозначное соответствие между множеством прямых пучка и множеством точек любой прямой, не проходящей через вершину пучка *(рис. 1.6.1)*. Каждой прямой A^* пучка x^* соответствует единственная точка A прямой x и обратно. На рисунке соответственные точки и прямые одного цвета. Желтая прямая параллельна заданной прямой x и пересекает ее в бесконечно удаленной точке.

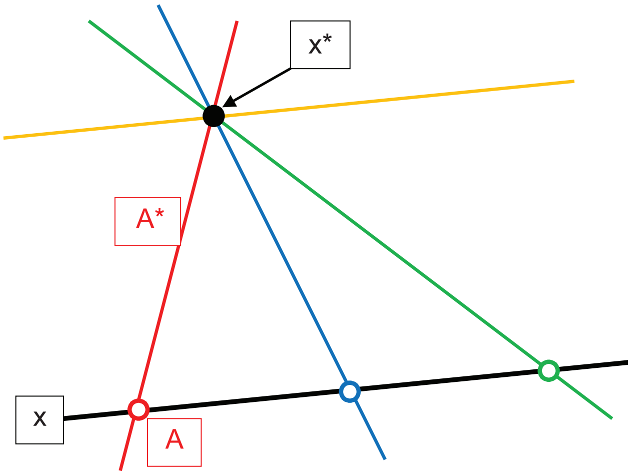


Рис. 1.6.1

Такая однозначность приводит к интереснейшему соответствию между прямыми и точками плоскости, которое носит название *принципа двойственности*. Согласно этому принципу любая плоскостная теорема, алгоритм, соответствие, утверждение и т. д.

остаются справедливыми, если в них точки и прямые поменять местами. Например, утверждению, что два множества точек, принадлежащих двум прямым, пересекаются в точке, соответствует двойственное утверждение, что два множества прямых, принадлежащих двум пучкам, пересекаются по прямой и т. д.

Множественный подход позволяет дать принципу двойственности простое конструктивное обоснование и предложить универсальный алгоритм осуществления двойственных преобразований, пригодный для практического применения.

Выше было показано, что перспективная координатная шкала на прямой задается тремя произвольными точками.

Проективные координаты на плоскости могут быть заданы двумя прямыми (осями координат) и тремя точками на этих прямых. Эти точки определяют перспективную шкалу на каждой из координатных осей.

В простейшем случае одна из точек является тождественной и принадлежит обеим прямым. Если через эту тождественную точку A провести произвольную прямую A^*, на которой произвольным образом назначить вершины пучков x^*, y^*, то, соединив эти вершины с точками на координатных прямых x, y, получим два пучка прямых, находящихся в однозначном перспективном соответствии с точками данных прямых *(рис. 1.6.2)*. Таким образом получаем геометрическую конструкцию, состоящую из двух прямых x, y, на каждой из которых указаны по три точки A, B, C и A, D, E. Точка A принадлежит обеим прямым и является их пересечением. Этой конструкции соответствует двойственная конструкция, состоящая из двух точек (вершин пучков) x^*, y^*, через каждую из которых проходит по три прямых A^*, B^*, C^* и A^*, D^*, E^*. Прямая A^* принадлежит обоим пучкам и является их пересечением.

Алгоритм построения двойственных элементов по предложенной схеме чрезвычайно прост. Две произвольные точки (координаты) на координатных осях определяют единственную прямую, проходящую через эти точки. Прямую, проходящую через две точки, можно трактовать как пересечение двух множеств прямых, проходящих через эти точки.

Пересечение двух прямых пучков, проходящих через эти заданные координатные точки, определяет единственную точку, двойственную данной прямой. И обратно: любая точка на плоскости определяет две прямые пучков, которые пересекают координатные оси в двух точках, определяющих прямую, двойственную данной точке.

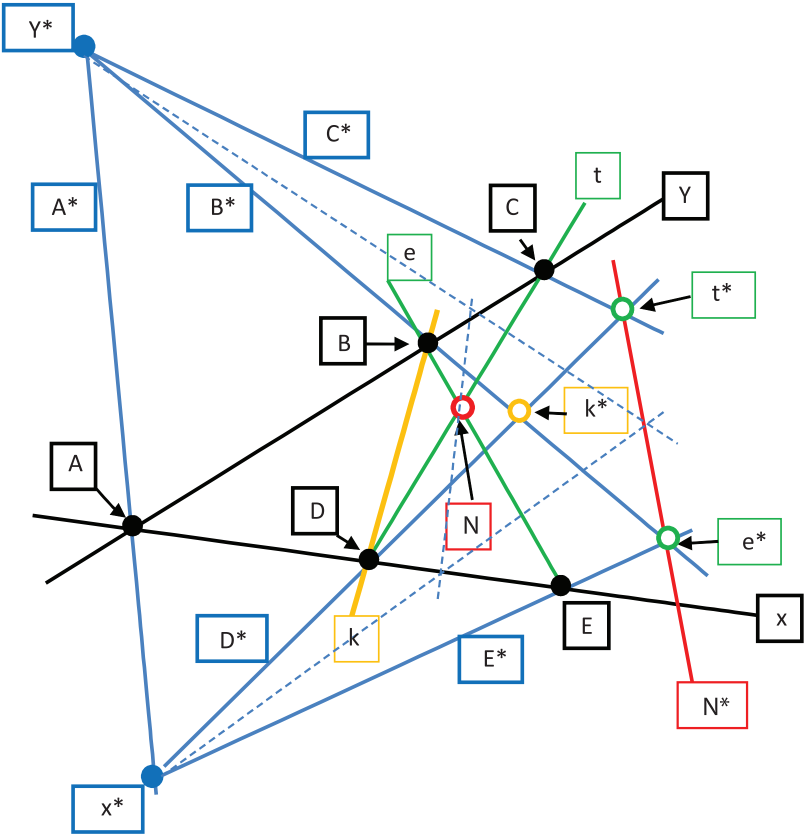


Рис. 1.6.2

В рассмотренной геометрической конструкции каждой точке, принадлежащей заданной прямой, будет соответствовать прямая, проходящая через точку, двойственную этой прямой, и обратно: каждой прямой, проходящей через заданную точку, будет соответствовать точка, принадлежащая прямой, двойственной заданной точке. Иначе говоря, каждому множеству прямолинейного ряда точек соответствует множество прямых пучка и обратно.

Исключения для случаев, когда заданная прямая проходит через тождественную точку (начало координат) или точка принадлежит тождественной прямой, легко можно устранить заданием третьей координатной оси (координатный треугольник) и соответствующей этой оси двойственной точки.

На *рис. 1.6.2* две заданные координатные прямые и точки на них выделены черным цветом. Соответствующие вершины и прямые двойственных пучков – синим.

Принадлежность точки трем прямым естественно представить как результат пересечения трех прямых в одной точке. Принадлежность трех точек одной прямой также можно интерпретировать как пересечение трех пучков прямых по одной прямой. В первом случае три точки принадлежат множеству точек одной прямой, а во втором – три прямые принадлежат множеству прямых одного пучка.

Символически эти двойственные отношения можно представить в простой единообразной форме.

$$
\begin{array}{ll}
(A \cap B \cap C) \equiv x & (A^* \cap B^* \cap C^*) \equiv x^* \\
(A \cap D \cap E) \equiv y & (A^* \cap D^* \cap E^*) \equiv y^* \\
y \cap x \equiv A & y^* \cap x^* \equiv A^*
\end{array}
$$

Из соображений упрощения восприятия двойственные множества обозначены одинаковыми буквенными символами. Для различия данных и двойственных множеств используется знак *. Например, первую строку представленной символической записи следует понимать так, что точки *A, B, C* принадлежат прямой *x*, а прямые A^*, B^*, C^* проходят через точку x^*.

На *рис. 1.6.2* показано построение точки k^*, двойственной заданной прямой *k* (выделены желтым), и построение прямой N^*, двойственной заданной точке *N* (выделены красным).

Символически алгоритмы изображенных двойственных построений могут быть представлены в единообразной форме.

Для первого случая:

$$B \cap D \equiv k \quad B^* \cap D^* \equiv k^*$$

Для второго:

$$C \cap D \equiv t \qquad C^* \cap D^* \equiv t^*$$
$$B \cap E \equiv e \cap t \equiv N \qquad B^* \cap E^* \equiv e^* \cap t^* \equiv N^*$$

Так как все элементы или множества, получаемые в результате операций, представляют собой сочетания заданных элементов или множеств, то, используя стандартную алгебраическую систему скобок и последовательности операций, можно не присваивать промежуточным результатам самостоятельных обозначений.

Следовательно, любой геометрический позиционный алгоритм можно записать, используя только символы, обозначающие изначально заданные элементы и конечный результат. Например, второй из вышеприведенных алгоритмов можно представить в виде:

$$(C \cap D) \cap (B \cap E) \equiv N \qquad (C^* \cap D^*) \cap (B^* \cap E^*) \equiv N^*$$

Такая форма записи более удобна при большом количестве промежуточных результатов.

Рассмотренный плоскостной алгоритм двойственных преобразований совершенно формально распространяется на пространство любой размерности.

Если n – размерность пространства, то размерности k, k^* линейных образов (множеств), двойственных в данном пространстве, связаны равенством:

$$k^* = n - k - 1 \qquad (1.6.1)$$

Например, в трехмерном пространстве в положительной области размерностей имеются две пары двойственных множеств. Плоскость (множество точек и прямых, принадлежащих плоскости) – связка (множество прямых и плоскостей, проходящих через одну точку). Прямая (множество точек, принадлежащих прямой) – пучок (множество плоскостей, проходящих через одну прямую).

В трехмерном пространстве для осуществления двойственных преобразований достаточно задать три прямые (оси) x, y, z, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в одной тождественной точке O (начало координат). На каждой прямой произвольным образом назначить по две точки. Эти две точки вместе с третьей тождественной определяют на каждой оси перспективное соответствие точек. Иначе говоря, определяют в пространстве трехмерные проективные координаты.

Через начало координат проводим произвольную плоскость O^*, на которой назначаем три произвольные прямые x^*, y^*, z^*, не проходящие через начало координат. Пучки плоскостей, определяемые этими прямыми, двойственны множествам точек на осях координат.

Любая плоскость пересекает координатные оси в трех точках. Каждой из этих точек соответствует единственная плоскость соответствующего пучка. Три полученные таким образом плоскости пересекаются в единственной точке, которая и является двойственной заданной плоскости. На *рис. 1.6.3* схематически представлена графическая реализация этого алгоритма. Оси координат и соответствующие им прямые выделены одинаковыми цветами (желтый, синий, зеленый). Показано построение двойственных плоскости и точки (выделены красным цветом). Вспомогательные построения показаны тонкими линиями.

Графическое изображение алгоритма двойственных преобразований даже для трехмерного пространства выглядит достаточно сложным, не говоря уже о многомерных пространствах. Для многомерных пространств реальна только символическая интерпретация построений и графическая иллюстрация конечного результата.

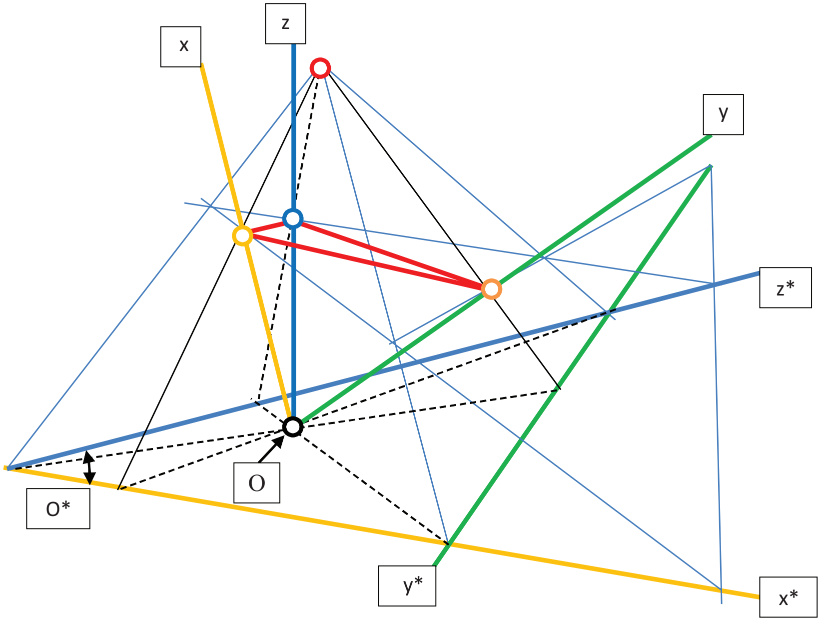


Рис. 1.6.3

Принцип двойственности в сочетании с множественной символической системой записи геометрических алгоритмов дает весьма эффективный инструмент, позволяющий решать многие задачи, возникающие при построении проекционных изображений.

В качестве примера рассмотрим построение кривых второго порядка (окружности, эллипсы, параболы и гиперболы).

На *рис. 1.6.4* представлен известный проективный алгоритм построения любого количества точек эллипса (или любой другой кривой второго порядка) по пяти произвольным заданным точкам, принадлежащим этой кривой.

Отметим, что в аналитической геометрии окружность, эллипс, парабола и гипербола описываются различными уравнениями, которые, кроме того, зависят от принятой системы координат. Проективный алгоритм имеет то преимущество, что он одинаков для всех перечисленных кривых и не связан с какой-либо системой координат.

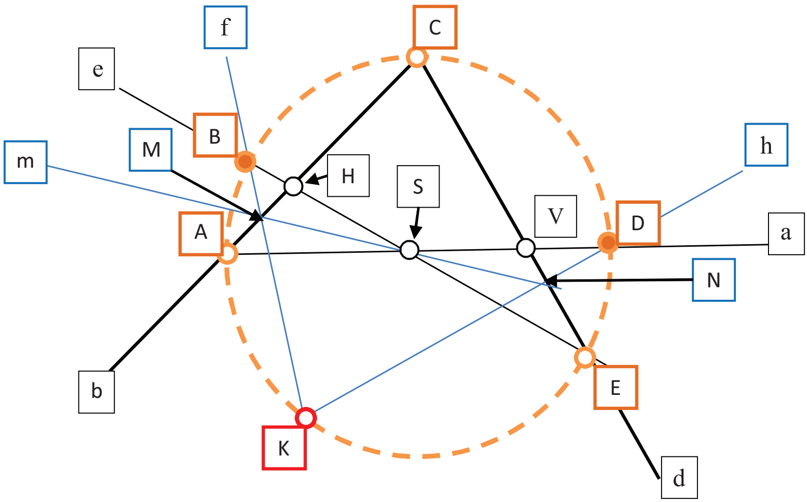


Рис. 1.6.4

Пусть A, B, C, D, E – пять произвольно заданных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Все эти пять точек совершенно равноправны. На рисунке данные точки выделены оранжевым цветом.

Алгоритм построения сводится к тому, что любую пару точек выбираем в качестве вершин двух пучков, и задача сводится к нахождению соответственных прямых этих пучков. Пересечение соответственных прямых и будет давать искомые точки.

Оставшиеся три из пяти заданных точек определяют три прямые, любые две из которых могут быть выбраны в качестве осей перспективности для каждого из двух пучков. На рисунке вершинами пучков назначены точки B, D, а соответствующими осями перспективности – прямые $b \equiv (A \cap C)$ и $d \equiv (E \cap C)$. Выполнив операции $(B \cap E) \equiv e$, $(D \cap A) \equiv a \cap e \equiv S$, находим точку S, которая является вершиной пучка, перспективного и пучку B относительно оси b, и пучку D относительно оси d.

Через найденную точку S проводится произвольная прямая m (символически $S \supset m$), которая в пересечении с прямыми b, d дает точки M, N. Соединяя эти точки с точками B, D, находим соответственные прямые f, h, пересечение которых и дает точку K, принадлежащую кривой, заданной пятью точками. Таким образом можно построить любое количество точек, принадлежащих кривой, так как через точку S проходит бесчисленное количество прямых и каждой из них будет соответствовать единственная точка на кривой.

Символически рассмотренный алгоритм можно представить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&A \cap D \equiv a \\
&B \cap E \equiv e \cap a \equiv S \supset m \\
&A \cap C \equiv b \\
&E \cap C \equiv d \\
&m \cap b \equiv M \cap B \equiv f \\
&m \cap d \equiv N \cap D \equiv h \cap f \equiv K.
\end{aligned}
$$

Если не присваивать промежуточным результатам самостоятельных обозначений, то алгоритм может быть записан короче с использованием обозначений только заданных точек A, B, C, D, E, произвольно заданной прямой m и конечного результата K:

$$[(A \cap D) \cap (B \cap E)] \supset m \qquad \{[m \cap (A \cap C)] \cap B\} \cap \{[\mathrm{m} \cap (E \cap C)] \cap D\} \equiv K.$$

На *рис. 1.6.5* показано построение касательной k, проходящей через найденную точку K. Построение приведено без пояснений. Рекомендуется в качестве упражнения составить символическое описание алгоритма построений.

На основании принципа двойственности можно сделать вывод, что если кривая второго порядка однозначно определяется пятью точками, то с равным успехом она определяется пятью касательными. Для нахождения любого количества касательных и точек касания используются те же самые алгоритмы. Нужно только помнить, что в этом случае точкам соответствуют прямые, а прямым – точки. Знак * для различия данных и двойственных элементов использовать не обязательно.

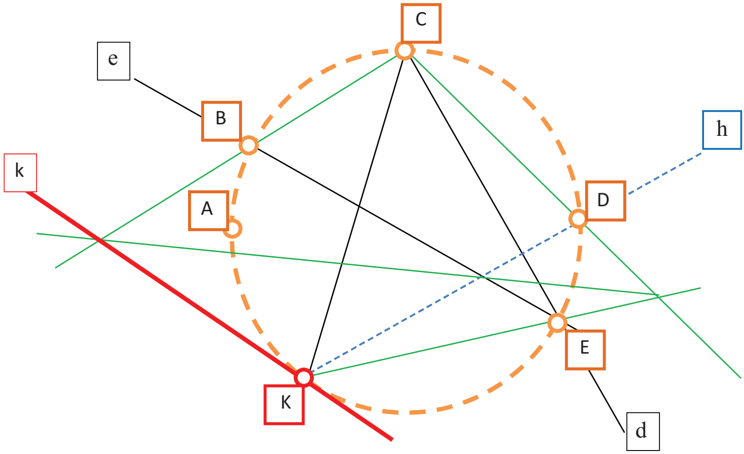


Рис. 1.6.5

На *рис. 1.6.6* показано построение касательной K к эллипсу, заданному пятью касательными A, B, C, D, E.

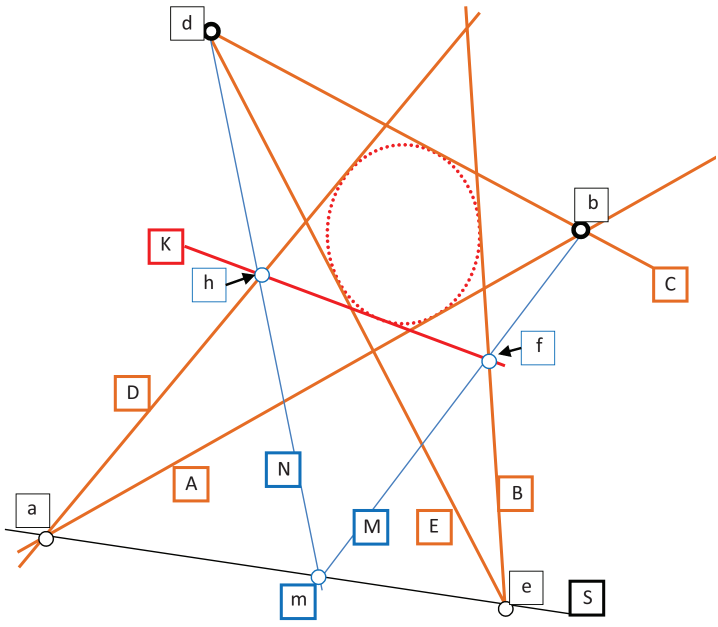


Рис. 1.6.6

Точка касания на построенной касательной находится построением, двойственным показанному на *рис. 1.6.5*.

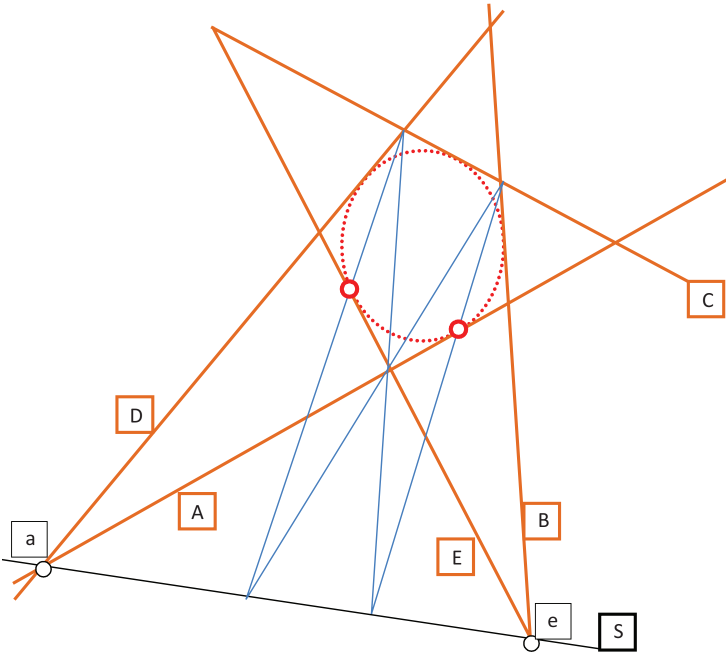


Рис. 1.6.7

На *рис. 1.6.7* показано построение двух точек касания на двух заданных касательных. Если построить все точки касания и соединить их прямыми, то получится следующая изящная композиция *(рис. 1.6.8)*, которая может быть использована при решении целого ряда задач, относящихся к построению кривых второго порядка.

Еще раз подчеркнем, что рассмотренные алгоритмы без всяких изменений применимы ко всем без исключения кривым второго порядка. Если одну из пяти точек или пяти касательных назначить бесконечно удаленной, то получим параболу, если две точки – гиперболу.

Аналогичным образом могут быть формализованы все известные позиционные алгоритмы и найдены им двойственные.

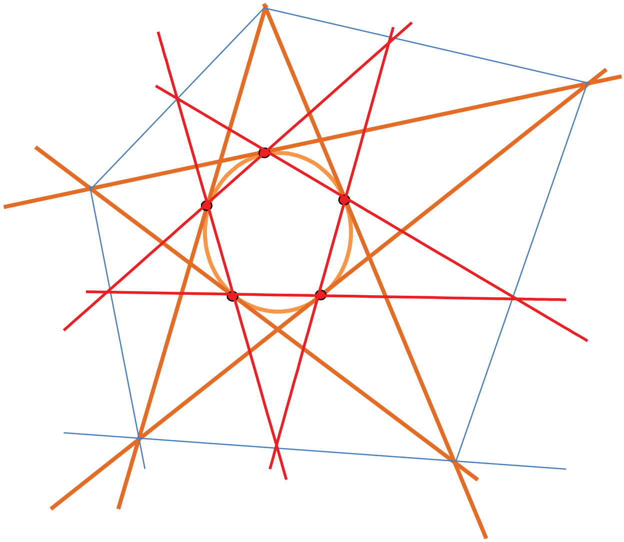


Рис. 1.6.8

II. ПРОЕКЦИОННЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Плоскостные проекционные изображения имеют наибольшее распространение как в науке и технике, так и в искусстве. Это объясняется относительной простотой построения и восприятия. Многообразие таких изображений очень велико. Частным случаем плоскостных изображений являются линейные проекционные изображения. Трехмерный проекционный аппарат для построения таких проекций чрезвычайно прост и состоит из плоскости и точки, не принадлежащей этой плоскости. Плоскость, на которую осуществляется проецирование, принято называть картинной плоскостью или просто картиной; точку, из которой осуществляется проецирование, – центром проецирования или точкой зрения.

В зависимости от положения центра проецирования относительно картинной плоскости принято различать три вида линейных проекций:

– Ортогональные, или прямоугольные, проекции (аксонометрии), при которых проецирующие прямые перпендикулярны картине.

– Косоугольные аксонометрические проекции, при которых проецирующие прямые параллельны между собой и расположены под произвольным углом к картине.

– Центральные, или перспективные, проекции, при которых проецирование осуществляется из произвольной точки трехмерного пространства, расположенной на конечном расстоянии от картины.

Наиболее общими являются центральные проекции. Ортогональные проекции представляют собой частный случай параллельных косоугольных проекций, которые, в свою очередь, есть частный случай центрального проецирования.

2.1. Ортогональные проекции

Ортогональными, или прямоугольными, называют проекции, образованные проецирующими прямыми, перпендикулярными картинной плоскости. Все перпендикуляры к одной плоскости параллельны между собой и пересекаются в бесконечно удаленной точке. Следовательно, аппарат ортогонального проецирования состоит из картинной плоскости и пучка параллельных прямых, перпендикулярных картине. Точка зрения в этом случае находится в бесконечности.

В реальности мы никогда не видим предметы в ортогональной проекции, так как всегда рассматриваем их с конечного расстояния. Изображения, весьма близкие к ортогональным, получаются на спутниковых фотографиях и при наблюдении удаленных космических объектов в телескоп.

Тем не менее ортогональные проекции имеют наибольшее практическое применение из всех существующих проекций. Это объясняется их простотой и высокой степенью наглядности. Как правило, большая часть графической составляющей проектной или технической документации выполняется именно в этих проекциях.

В изобразительном искусстве ортогональные проекции широко использовались в древности, затем были практически вытеснены аксонометрическими и перспективными проекциями. В конце XIX – начале XX в. к ним снова вернулись в некоторых художественных направлениях (кубизм, конструктивизм, супрематизм и др.). Но даже не применяя ортогональные проекции непосредственно, многие художники пользуются ими на подготовительном этапе как простым и удобным инструментом, позволяющим решать многие практические задачи.

Важным достоинством ортогональных проекций является то, что отрезок или плоская фигура, параллельные картинной плоскости, проецируются на нее в натуральную величину.

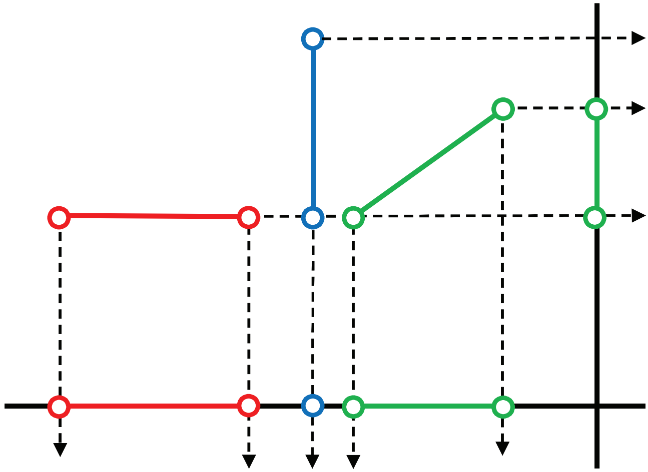


Рис. 2.1.1

На *рис. 2.1.1* представлены ортогональные проекции трех равных отрезков (красный, синий и зеленый), по-разному расположенных относительно двух взаимно перпендикулярных картинных прямых. Отрезок, параллельный горизонтальной картинной прямой (красный), проецируется на нее в натуральную величину. Отрезок, перпендикулярный картинной прямой (синий), проецируется в точку. Проекции отрезка, произвольно расположенного относительно картинных прямых (зеленый), представляют собой катеты прямоугольного треугольника, где сам отрезок является гипотенузой. Следовательно, по двум ортогональным проекциям отрезка можно определить его истинную величину. Задача сводится к нахождению гипотенузы по двум известным катетам. Ортогональная проекция отрезка может быть либо равна ему, либо меньше.

В принципе, определить длину отрезка можно и по его перспективному изображению, и по любому иному проекционному изображению, но задача эта более сложная. Возможность относительно просто определять по проекциям истинные размеры изображенного объекта и обусловило столь широкое распространение ортогональных проекций на практике.

Для изображения на плоскости трехмерных объектов чаще всего применяется метод двух ортогональных проекций (эпюр Монжа). Сущность метода состоит в том, что трехмерный объект ортогонально проецируется на две взаимно перпендикулярные плоскости, которые затем совмещаются. При этом каждая точка трехмерного пространства имеет на чертеже пару проекций. Все пары проекций всех точек пространства лежат на прямых, проходящих через одну бесконечно удаленную точку (на параллельных прямых).

Таким образом, устанавливается однозначное соответствие между трехмерным множеством точек пространства и трехмерным множеством пар проекций этих точек.

Так как две точки определяют прямую, то и две пары проекций, соответствующие двум точкам, также определяют прямую. Плоскость определяется тремя точками, следовательно, на ортогональном чертеже может быть задана тремя парами проекций. Любая пространственная метрическая или позиционная задача может быть решена на плоскости.

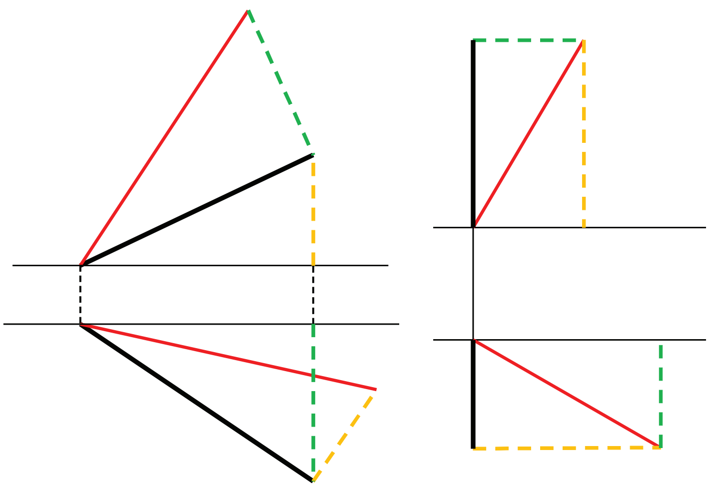


Рис. 2.1.2a, 2.1.2b

На *рис. 2.1.2a, 2.1.2b* представлены пары ортогональных проекций отрезков двух прямых. В первом случае отрезок занимает случайное положение относительно плоскостей проекций. Во втором случае отрезок лежит в плоскости, перпендикулярной плоскостям проекций. Истинные величины этих отрезков, найденные по проекциям, выделены красным цветом.

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна плоскости и всем прямым, принадлежащим этой плоскости. Все прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны между собой.

Если одна из двух взаимно перпендикулярных прямых параллельна картинной плоскости, то ортогональные проекции этих прямых также перпендикулярны.

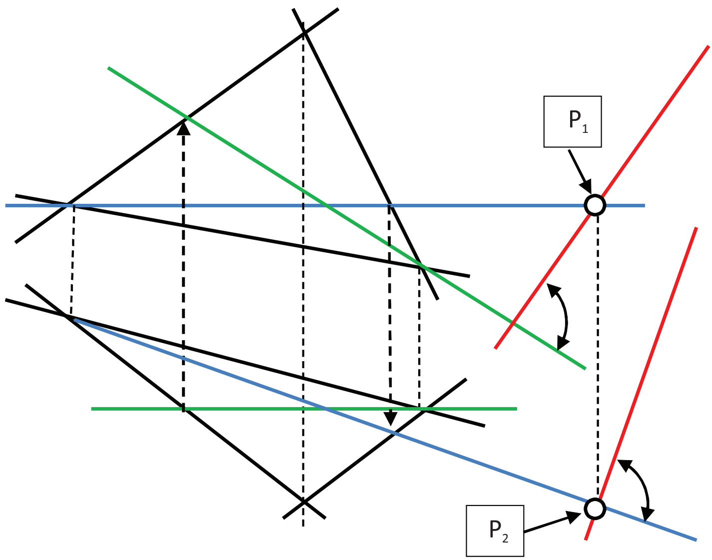


Рис. 2.1.3

На основании этих двух положений решается задача построения перпендикуляра к плоскости в ортогональных проекциях. На *рис. 2.1.3* представлена плоскость, заданная тремя точками, через которые проведены три прямые. Построены две проекции перпендикуляра (красные) к этой плоскости и найдены проекции P_1 и P_2 точки пересечения его с плоскостью. Одна из проекций перпендикулярна проекции горизонтальной прямой (синяя), другая – проекции фронтальной прямой (зеленая).

На *рис. 2.1.4* представлены две пары ортогональных проекций двух равных кубов, занимающих различные положения относительно плоскостей проекций. В первом случае (слева) все грани куба либо параллельны, либо перпендикулярны плоскостям проекций. Грани, параллельные плоскостям проекций, проецируются в натуральную величину, и обе проекции представляют собой равные квадраты.

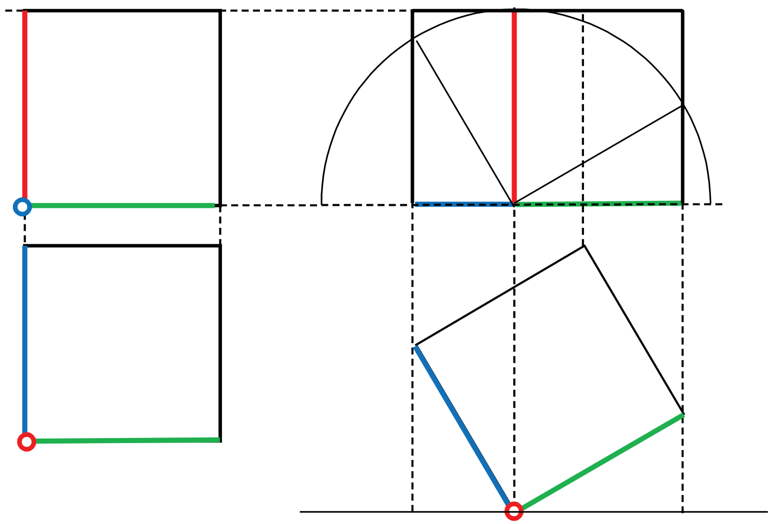


Рис. 2.1.4

Во втором случае только горизонтальные грани куба параллельны горизонтальной плоскости проекций. Вертикальные ребра куба проецируются в натуральную величину на вертикальную плоскость, а горизонтальные – на горизонтальную. Вертикальные проекции горизонтальных ребер равны катетам прямоугольного треугольника, где гипотенузой является ребро куба. Следовательно, построение может быть выполнено на одной фронтальной проекции, как показано на рисунке.

На *рис. 2.1.5* показано построение ортогональной проекции куба, случайным образом расположенного относительно плоскости проекций.

Проекции трех координатных взаимно перпендикулярных осей (красная, синяя и зеленая) заданы произвольно. Также произвольно задан единичный отрезок по красной оси (утолщенная линия). Для построения единичных отрезков по синей и зеленой осям выстраивается треугольник, в котором координатные оси являются высотами (размер треугольника значения не имеет). При помощи двух полуокружностей, построенных на сторонах треугольника, находим величины единичных отрезков по синей и зеленой осям. Отрезки, выделенные утолщенной желтой линией, равны между собой и равны истинной величине единичного отрезка (ребра куба).

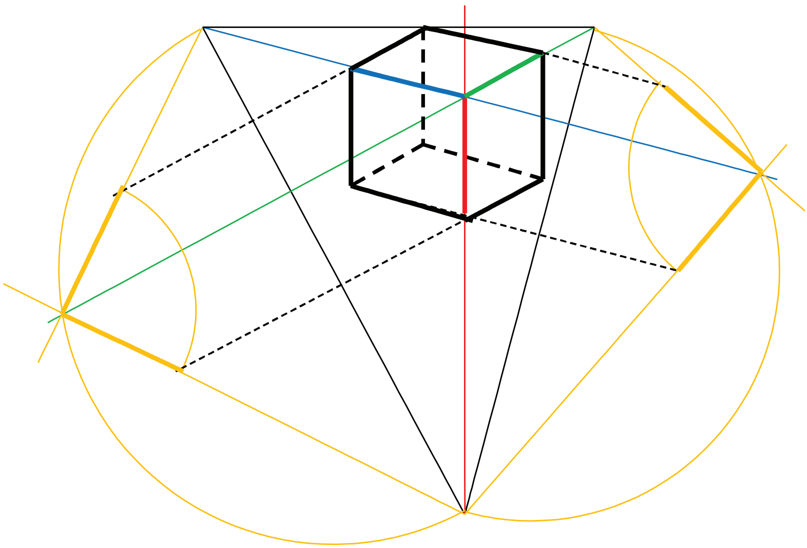


Рис. 2.1.5

Следовательно, основную теорему ортогональных проекций, или ортогональных аксонометрий, можно сформулировать следующим образом.

Ортогональная аксонометрия определена, если заданы три проекции трех координатных осей (ребер куба), углы между которыми больше или равны прямому углу, и произвольная проекция единичного отрезка на одной из осей.

В общем случае углы между проекциями осей могут быть произвольными, но обязательно больше прямого угла. В предельном случае, если угол прямой, задача решается как показано на *рис. 2.1.4*.

2.2. Параллельные, или аксонометрические, проекции

В отличие от ортогональных проекций, где проецирующие прямые параллельны между собой и перпендикулярны картинной плоскости, в ортогональных проекциях выполняется только требование параллельности проецирующих прямых. Угол наклона проецирующих прямых к картинной плоскости может быть произвольным. Иными словами, центром проецирования в параллельной проекции может быть любая точка бесконечно удаленной плоскости трехмерного пространства.

Следовательно, параллельные проекции охватывают более широкий круг проекций, нежели ортогональные, и ортогональные проекции являются частным случаем параллельных проекций.

Изображением, весьма близким к параллельной проекции, является тень от освещенного солнцем объекта, падающая на плоскую поверхность под произвольным углом. Так как расстояние до солнца неизмеримо больше, нежели видимые земные расстояния, то солнце можно считать бесконечно удаленным источником освещения или бесконечно удаленной точкой проецирования. Вполне вероятно, что изначально и само понятие проекции возникло из наблюдений за тенями.

При параллельном проецировании отрезка длина его проекции может изменяться от нуля до сколь угодно большой величины в зависимости от взаимного расположения центра проецирования и картинной плоскости. Следует отметить, что длина проекции отрезка может быть сколь угодно большой, но не бесконечной, так как в этом случае проецирующие прямые должны быть параллельны картинной плоскости. Такие прямые пересекаются с картиной в бесконечно удаленной точке. Центр проецирования оказывается лежащим в плоскости картины, и все точки проецируемого отрезка проецируются в одну эту точку (картинная плоскость проходит через центр проецирования).

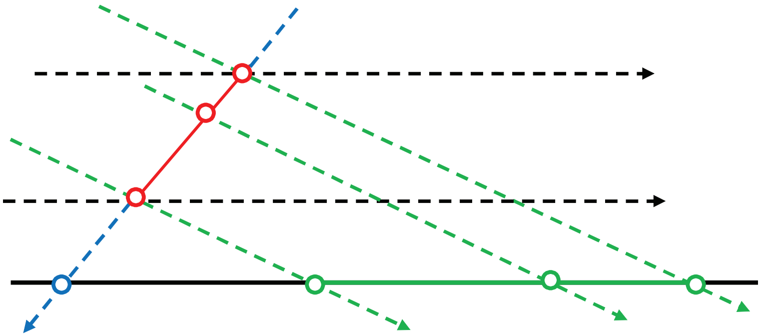


Рис. 2.2.1

Сказанное схематически представлено на *рис. 2.2.1*. Отрезок (красный) проецируется на картинную прямую (черная) из трех бесконечно удаленных центров (синий, зеленый и черный пунктиры). В первом случае центр проецирования и отрезок лежат на одной прямой и отрезок проецируется в точку, во втором – проецирующие прямые расположены под некоторым произвольным углом к картине и проекцией отрезка является также отрезок. Длина проекции тем больше, чем меньше угол наклона проецирующих прямых к картине. В третьем случае проецирующие прямые параллельны картинной прямой и все точки отрезка проецируются в бесконечно удаленную точку этой прямой.

За исключением первого и третьего предельных случаев, для всех остальных проекций сохраняются пропорциональные отношения на отрезке и на его проекции. Например, на *рис. 2.2.1* средняя точка красного отрезка делит его в том же отношении, что и средняя точка зеленого.

Наиболее распространенной системой координат в трехмерном пространстве является декартова система прямоугольных координат. Эта система состоит из трех взаимно перпендикулярных прямых (осей), на которых отложены три равных отрезка, принятых за единицу измерения. Параллельную проекцию декартовых координат на плоскость принято называть аксонометрической проекцией.

Согласно основной теореме аксонометрии (Польке–Шварца) *три произвольных отрезка на плоскости, исходящие из одной точки, всегда можно представить как параллельную проекцию трех равных взаимно перпендикулярных отрезков в трехмерном пространстве (прямоугольный равносторонний тетраэдр)*.

Следовательно, для задания аксонометрии достаточно задать на плоскости три произвольных прямых (оси), проходящих через одну точку, на которых назначить три произвольных единичных отрезка. После чего все позиционные и метрические задачи могут быть решены непосредственно на плоскости.

Заданные прямые могут и не проходить через одну точку, но всегда могут быть в нее сведены путем параллельного перемещения. Последнее обстоятельство следует отметить, так как при решении обратной задачи нахождения истинных размеров по имеющемуся изображению (например, фотографии) отрезки, размеры которых известны, могут быть и не пересекающимися, а скрещивающимися.

На *рис. 2.2.2* показан один из возможных вариантов конструктивного установления соответствия между прямоугольным равносторонним тетраэдром и его произвольной параллельной проекцией.

Аксонометрическая проекция выстраивается методом построения дополнительной произвольной проекции по двум данным ортогональным проекциям равностороннего прямоугольного тетраэдра (схема Гаука). Соответственные на ортогональных проекциях и в аксонометрии взаимно перпендикулярных ребра тетраэдра или куба (оси координат) выделены одинаковыми цветами (красный, синий, зеленый). Произвольным образом задаются две оси перспективности и две пары параллельных пучков. Точки дополнительной аксонометрической проекции находятся на пересечении соответственных прямых этих пучков.

По этой схеме может быть решена и обратная задача – установление проекционной связи между произвольной параллельной (аксонометрической) проекцией и двумя ортогональными проекциями трех равных взаимно перпендикулярных отрезков.

Коричневая и желтая точки на *рис. 2.2.2* делят соответственные отрезки в аксонометрии и на ортогональных проекциях в равных отношениях, что позволяет определить направления перспективных проецирующих пучков и положение осей перспективности на пересечении соответственных прямых этих пучков.

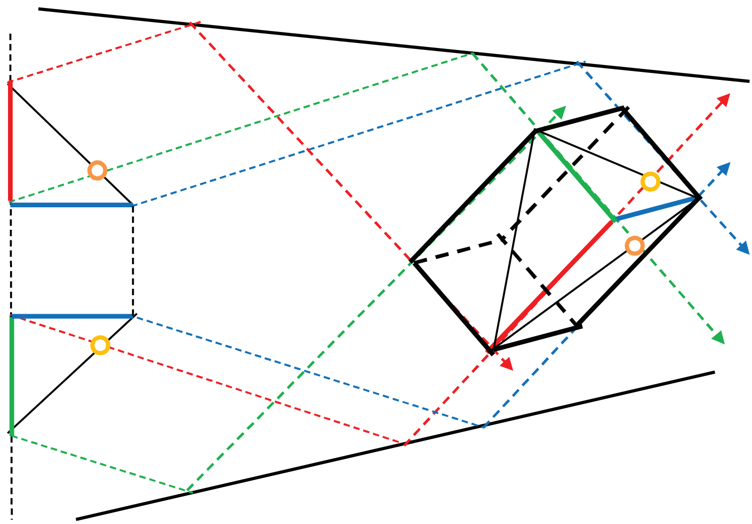


Рис. 2.2.2

Таким образом, косоугольную аксонометрическую проекцию куба можно построить, задав три произвольных единичных отрезка на трех произвольных координатных осях. В качестве координатных осей могут быть приняты любые три смежных ребра куба.

Наиболее простым вариантом косоугольных параллельных проекций является вариант, при котором две координатные оси параллельны картине. В этом случае две параллельные грани единичного куба проецируются в натуральную величину. Направление третьей координатной оси и величина единичного отрезка на ней могут быть произвольными. На *рис. 2.2.3* показана аксонометрическая проекция куба, два ребра которого перпендикулярны, а третье является биссектрисой прямого угла. Величина единичного отрезка по синей оси назначена в половину диагонали единичного квадрата.

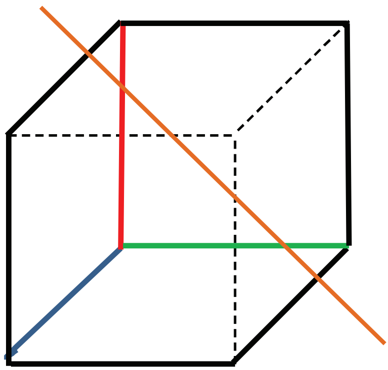


Рис. 2.2.3

Такой выбор очень упрощает построения. Например, прямая, параллельная диагонали квадрата (оранжевая), делит все пересекаемые единичные отрезки в равных отношениях.

При параллельном проецировании окружность либо остается окружностью (если ее плоскость параллельна картине), либо преобразуется в эллипс. Квадрат либо остается квадратом, либо преобразуется в четырехугольник с параллельными противоположными сторонами (прямоугольник или параллелограмм). Построение эллипса можно осуществить, установив коллинейное соответствие между квадратом со вписанной в него окружностью и его аксонометрической проекцией. После чего для каждой точки окружности можно найти соответственную точку в аксонометрии. Этот метод наиболее прост для понимания, но не очень удобен в работе. Для его реализации необходимо иметь начерченную окружность и переносить ее точки на аксонометрический чертеж.

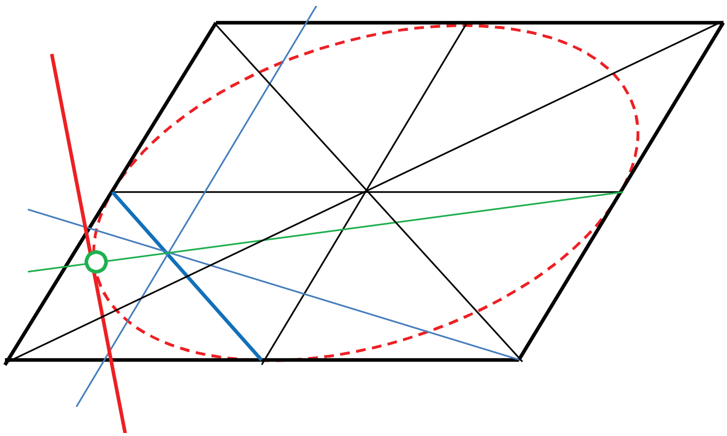


Рис. 2.2.4

Существуют более простые и эффективные методы построения аксонометрической проекции окружности непосредственно на аксонометрическом чертеже. Например, построение, показанное на *рис. 2.2.4*, позволяет построить любое количество точек эллипса и касательных к этим точкам без помощи циркуля.

На прямой, выделенной утолщенной синей линией (сторона вписанного четырехугольника), выбирается произвольная точка, через которую проводятся три прямые (две тонкие синие и одна зеленая). Пересечение синих линий со сторонами четырехугольника определяет положение касательной (красная). Пересечение зеленой линии с касательной дает точку касания. Построения для остальных трех четвертей эллипса выполняются аналогично или симметрично.

2.3. Перспективные или центральные проекции

Из всех проекционных изображений перспективные проекции наиболее близки к видимой реальности, так как работа человеческого глаза основана на принципе центрального проецирования и изображение, фокусируемое хрусталиком на сетчатке, является перспективным. По этой причине перспектива широко используется на практике как теоретическая основа для создания наглядных изображений и художественных произведений.

Аппарат центрального (перспективного) проецирования чрезвычайно прост и состоит из плоскости или иной поверхности (картина) и точки, не принадлежащей этой поверхности (центр проецирования, или точка зрения).

Если картиной является плоскость, то прямые линии отображаются на картине также в виде прямых и перспектива называется линейной. Главной точкой *P* линейной перспективы является точка пересечения перпендикуляра *p*, опущенного из центра проецирования *S* (точка зрения) с картинной плоскостью π *(рис. 2.3.1)*. Расстояние *P*–*S* от центра проецирования до главной точки называют дистанционным расстоянием *d* (на рисунке показано красным).

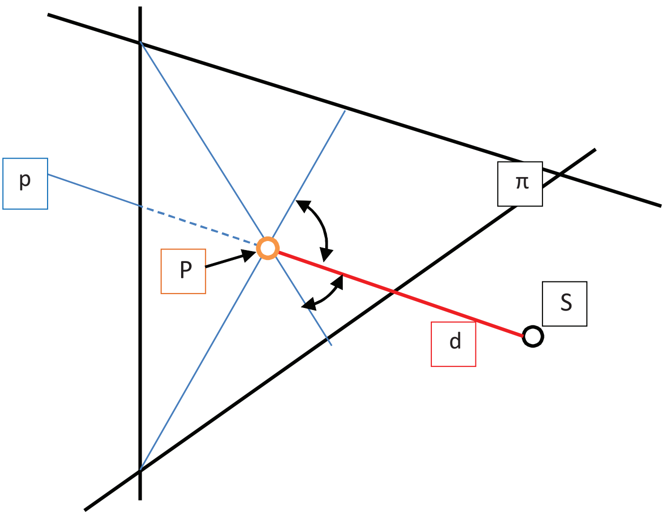


Рис. 2.3.1

Таким образом, для задания аппарата линейной перспективы на картине достаточно указать всего две точки: главную точку картины и какую-либо точку, удаленную от главной на дистанционное расстояние. Эти точки могут быть заданы непосредственно или косвенным образом.

Традиционно линией горизонта принято считать линию пересечения горизонтальной плоскости, проходящей через центр проецирования, с картинной плоскостью. Основанием картины называют линию пересечения картины с горизонтальной плоскостью. Но это вовсе не обязательно. За линию горизонта может быть принята любая прямая, проходящая через главную точку, а за основание картины – любая прямая, параллельная избранной линии горизонта.

Рассмотрим метод построения перспективного изображения объекта по двум его ортогональным проекциям. В качестве объекта выберем куб, так как, используя его изображение в качестве координатной системы, можно построить любое изображение.

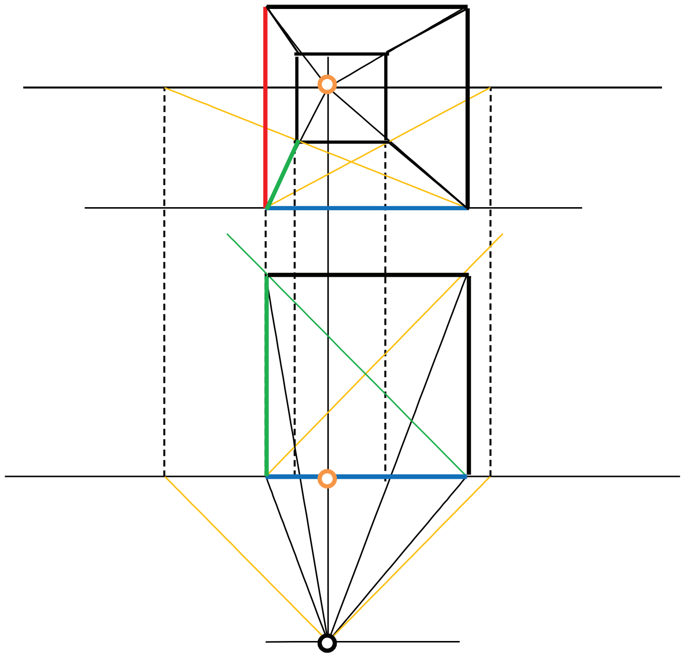


Рис. 2.3.2

Наиболее простым видом перспективы является так называемая фронтальная перспектива. Если картинная плоскость располагается параллельно вертикальной (фронтальной) плоскости проекций, то ее проекция на горизонтальную плоскость представляет собой горизонтальную прямую. В этом случае задача построения перспективы точки сводится к построению трех прямых.

На *рис. 2.3.2* показано построение перспективного изображения куба, передняя плоскость которого совпадает с фронтальной картинной плоскостью. Перспективное изображение получается непосредственно на фронтальной плоскости без искажений.

Различные перспективные изображения некоторого объекта можно получить либо перемещая точку зрения относительно неподвижного объекта, либо перемещая объект относительно неподвижной точки зрения. Обе эти операции совершенно адекватны и дают одинаковые результаты. Следовательно, перемещая и поворачивая объект относительно точки зрения, на фронтальной картине можно получить любое его перспективное изображение.

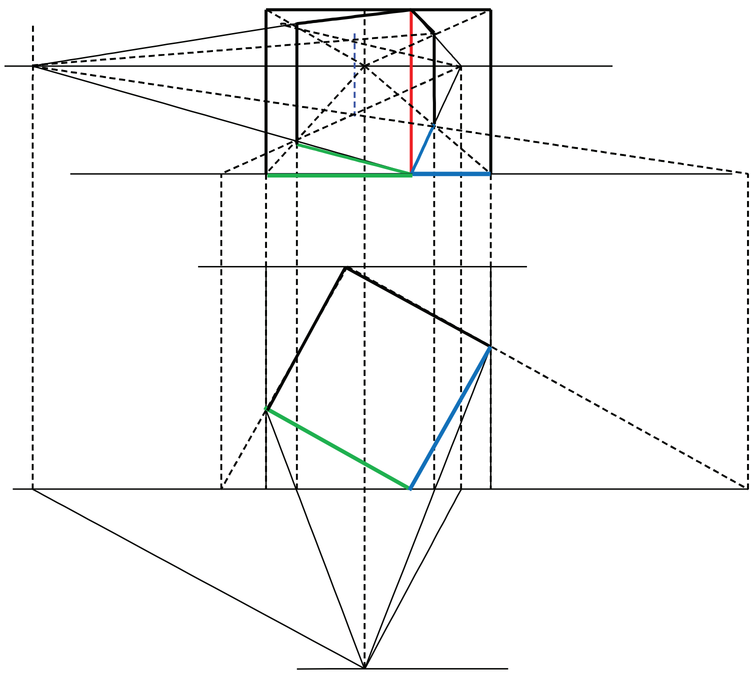


Рис. 2.3.3

На *рис. 2.3.3* показано построение перспективного изображения куба, ортогональная проекция которого произвольным образом развернута относительно фронтальной картинной плоскости.

Перспективное изображение получается непосредственно на фронтальной плоскости проекций.

Рассмотренный метод построения перспективного изображения с равным успехом можно использовать как для построения экстерьера, так и интерьера. На *рис. 2.3.4* показано построение интерьера прямоугольной комнаты, произвольным образом развернутой относительно картины.

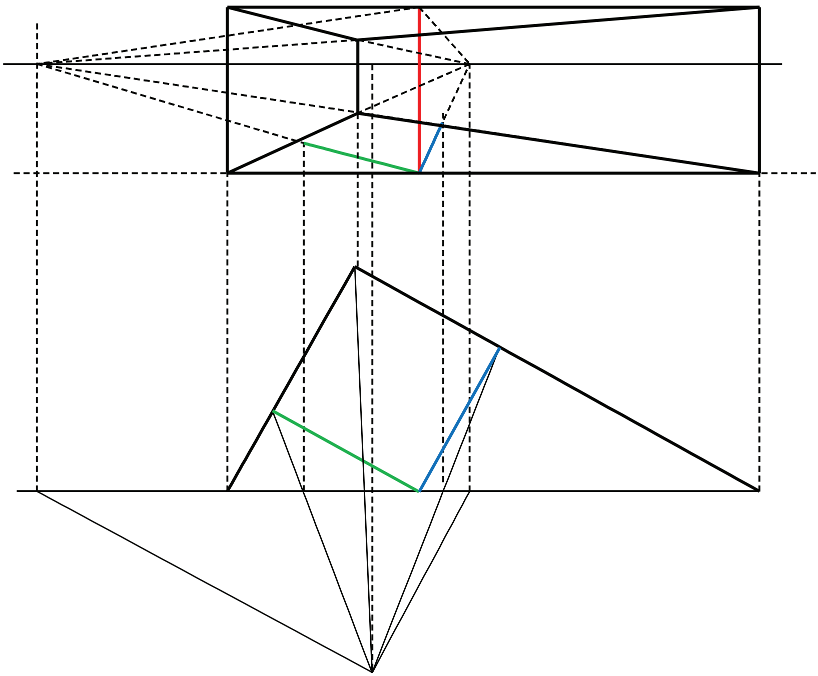


Рис. 2.3.4

Метод построения перспективы по двум ортогональным проекциям не очень удобен для художников. Художник, изображая некий объект, как правило, не имеет его ортогональных проекций. Рассмотрим метод, позволяющий все необходимые перспективные построения осуществлять непосредственно на картине, не прибегая к помощи ортогональных проекций.

Через произвольно назначенную главную точку картины *P* проводим произвольную проекцию бесконечно удаленной прямой *h*, на которой назначаем точку *F*, удаленную от главной точки на дистанционное расстояние (*PF* равно расстоянию от центра проецирования до картины). Обычно прямую *h* проводят горизонтально и называют линией горизонта. На *рис. 2.3.5* эти три элемента выделены оранжевым цветом.

Произвольно назначенная прямая и две точки на ней однозначно определяют проекционный перспективный аппарат и позволяют решить на картине все позиционные и метрические задачи.

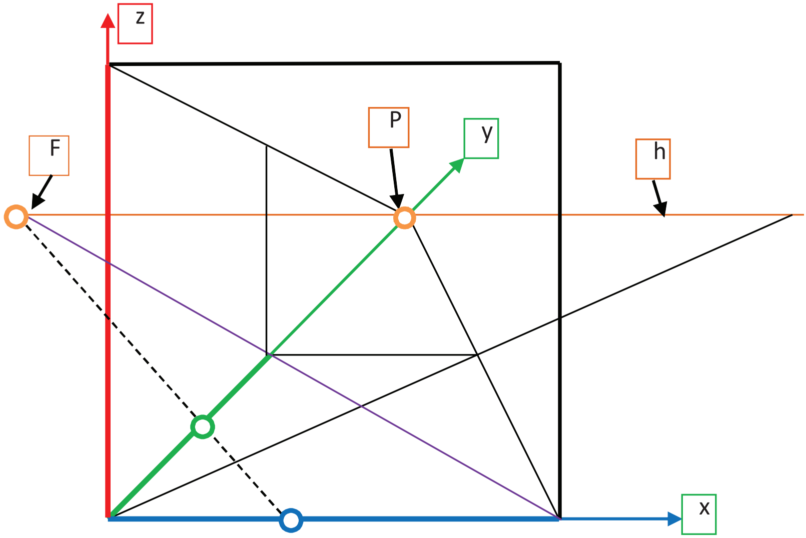


Рис. 2.3.5

Зададим в картинной плоскости произвольный квадрат, одна из сторон которого параллельна линии горизонта. Сторону этого квадрата примем за единицу измерения. Прямые, проведенные из вершин квадрата в главную точку, перпендикулярны картинной плоскости. Прямая, проведенная в дистанционную точку из вершины квадрата (фиолетовая), составляет с картиной угол в 45° и, следовательно, является диагональю квадрата, расположенного в горизонтальной плоскости, что дает возможность построить перспективные изображения квадратов в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Таким образом устанавливаются простейшие перспективные координаты, где шкала размеров по двум осям равномерная и только по одной – перспективная. Любая прямая, проходящая через дистанционную точку, параллельна диагонали квадрата и отсекает на горизонтальной и глубинной шкале отрезки, равные по истинной величине *(рис. 2.3.5)*. Это дает возможность установить истинные координаты точки, принадлежащей перспективному квадрату.

Так как натуральный и перспективный квадраты имеют общую сторону, можно установить между ними гомологичное соответствие. Для этого пары соответственных вершин соединяются прямыми, точка пересечения которых дает центр гомологии. На прямых, проходящих через этот центр, лежат все соответственные точки данных квадратов.

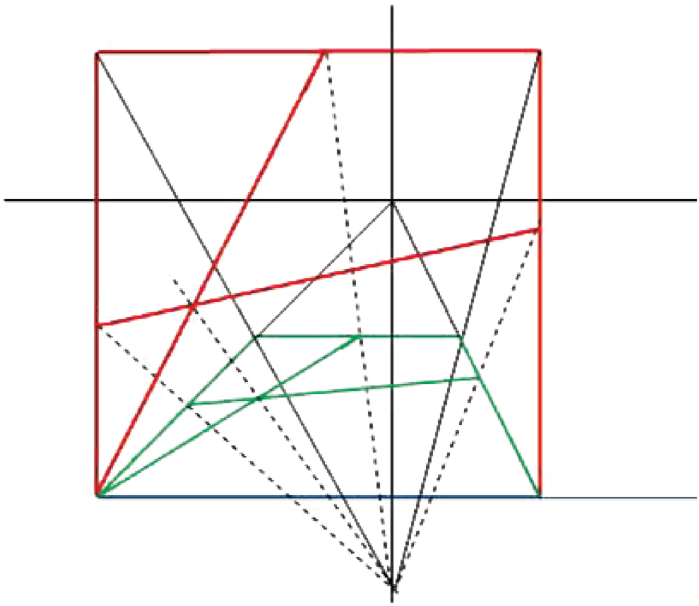


Рис. 2.3.6

На *рис. 2.3.6* показано построение в перспективе двух произвольных прямых, соответствующих двум прямым, лежащим в картинной плоскости.

Если координатный куб не только развернуть, но и наклонить произвольным образом относительно картины, то на фронтальной картине можно получить и так называемую перспективу на наклонной картинной плоскости. Но построить ортогональные проекции куба, произвольным образом развернутого относительно плоскостей проекций, довольно сложно. Более простым и удобным является комбинированный способ, при котором ребра куба вертикальны, а картина перпендикулярна вертикальной плоскости проекций и произвольно наклонена к горизонтальной плоскости.

Построение перспективного изображения на наклонной картинной плоскости по двум ортогональным проекциям в принципе ничем не отличается от построения перспективы на вертикальной картине. В том и в другом случае задача состоит в нахождении точек пересечения проецирующих прямых с картинной плоскостью.

Плоскость, перпендикулярная вертикальной плоскости проекций, всегда проецируется на нее в виде прямой (вырожденная проекция). Это значительно упрощает задачу нахождения точек пересечения проецирующих прямых с картинной плоскостью.

Наклонная картинная плоскость в общем случае не имеет вырожденных проекций, что усложняет нахождение искомых точек пересечения. Если назначить наклонную плоскость перпендикулярно вертикальной плоскости проекций, то она проецируется на нее в виде прямой, и задача упрощается.

На *рис. 2.3.7* картинная плоскость перпендикулярна вертикальной плоскости проекций и проецируется на нее в прямую. Графический алгоритм построения картинных проекций $A_{3.1}$–$A_{3.2}$ произвольной точки A, заданной проекциями A_1–A_2, показан на рисунке и сводится к построению трех прямых (обозначены синим цветом).

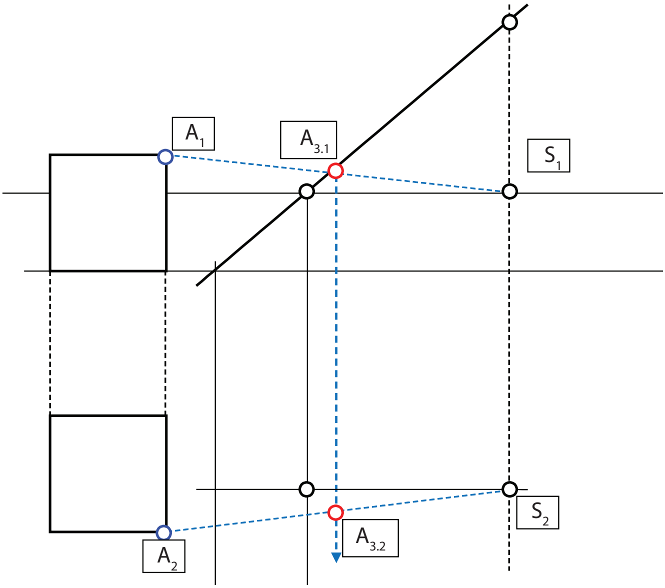


Рис. 2.3.7

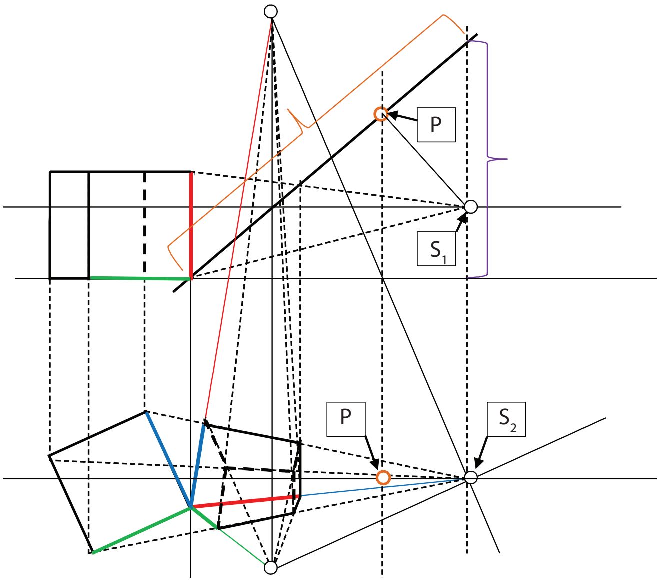


Рис. 2.3.8

На *рис. 2.3.8* показано построение перспективной проекции куба, развернутого относительно картины. Построив вершины и ребра куба на виде сверху, получаем его перспективное изображение, сжатое по высоте.

Чтобы построить натуральный вид этого изображения, высотные размеры следует брать с вертикальной проекции картины (истинный размер по высоте обозначен оранжевой скобкой).

На *рис. 2.3.9* построено перспективное изображение, имеющее натуральный вертикальный размер. Три точки схода параллельных ребер куба образуют проекцию бесконечно удаленного треугольника. Высоты этого треугольника пересекаются в главной точке, следовательно, точки в основании этих высот являются главными точками для трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Это позволяет, задав произвольный единичный отрезок по одной из осей, построить его проекции по двум остальным, что делает возможным сформулировать основную теорему перспективы.

Центральная (перспективная) проекция определяется заданием произвольных проекций трех взаимно перпендикулярных координатных осей, тремя произвольными проекциями бесконечно удаленных точек на этих осях и произвольной проекцией единичного отрезка на одной из осей.

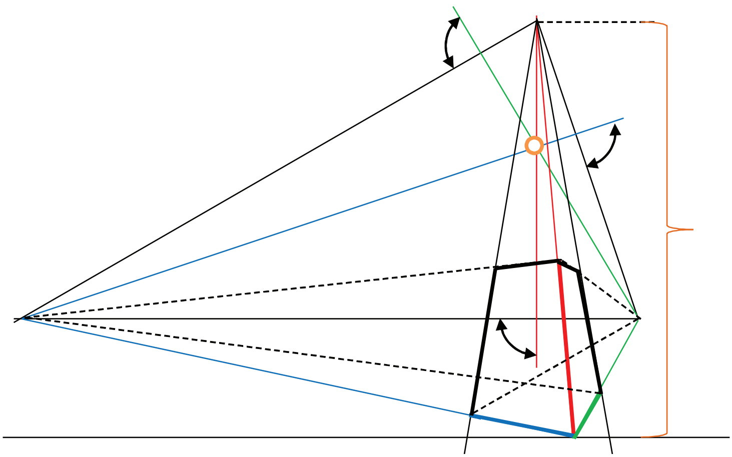


Рис. 2.3.9

Более подробно об этом можно прочитать в статье [4].

Геометрически правильно построенное перспективное изображение куба на *рис. 2.3.9* выглядит на картине весьма неубедительно. Изображение воспринимается как вытянутый по вертикали параллелепипед. Это происходит потому, что для правильного восприятия изображения, построенного на наклонной плоскости, его следует рассматривать под тем же углом и с той же точки зрения, а мы обычно рассматриваем картину примерно под прямым углом.

Для компенсации зрительного восприятия рекомендуется перепроецировать изображение на вертикальную плоскость (*на рис. 2.3.10* отмечено фиолетовой скобкой). Полученное в результате изображение более соответствует нашим представлениям о кубе.

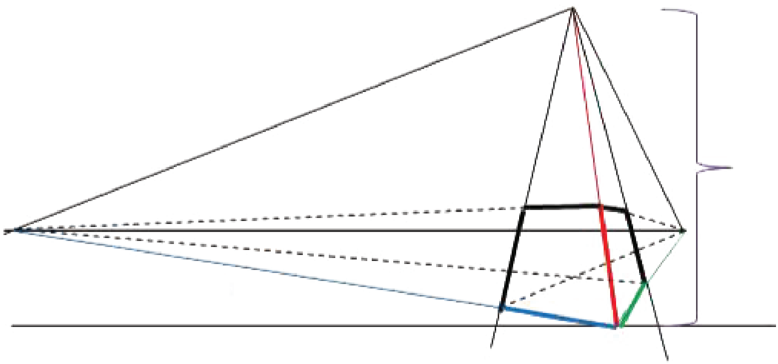


Рис. 2.3.10

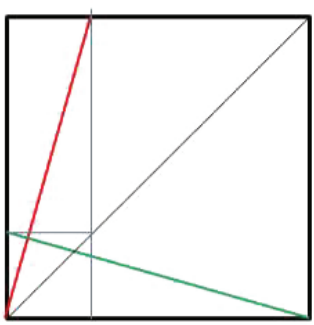


Рис. 2.3.11

Если в перспективе необходимо построить прямую, перпендикулярную заданной, то проще всего сделать это, используя свойства квадрата. На *рис. 2.3.11* показано построение двух произвольных перпендикулярных прямых, проходящих через вершины квадрата.

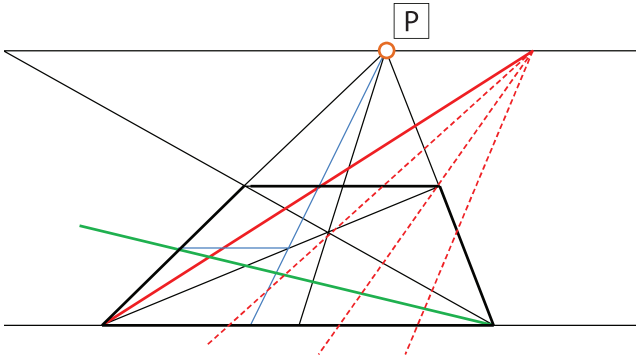


Рис. 2.3.12

На *рис. 2.3.12* показано аналогичное построение в перспективе. На рисунке задана главная точка картины *P* и перспективное изображение квадрата.

Задав произвольную прямую в перспективном квадрате (зеленая) и произведя рассмотренные выше построения, можно построить прямую, перпендикулярную заданной (красная). Точки пересечения перпендикулярных прямых с линией горизонта определяют вершины взаимно перпендикулярных пучков. Любые две прямые этих пучков являются перспективными проекциями взаимно перпендикулярных прямых. Так, на *рис. 2.3.12* прямые, показанные красным пунктиром, перпендикулярны зеленой прямой.

2.3.1. Построение прямой в недоступную точку схода

На практике зачастую точка схода прямых находится далеко за пределами, ограниченными рамками картины. Рассмотрим некоторые алгоритмы, позволяющие осуществлять построение прямых, проходящих через недоступную точку.

Имеются две прямые (на *рис. 2.3.1.1* выделены утолщенными линиями), точка пересечения которых находится за пределами картины.

Через произвольную точку (выделена) необходимо провести прямую в недоступную точку пересечения заданных прямых.

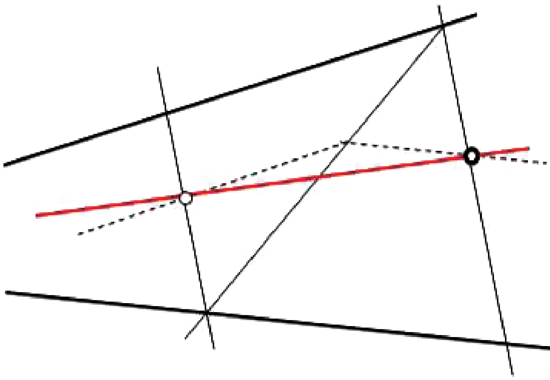


Рис. 2.3.1.1

Проводим две произвольные параллельные прямые, одна из которых проходит через данную точку. Задача сводится к тому, чтобы параллельные стороны полученной трапеции поделить в равных отношениях. Один из возможных вариантов решения представлен на рисунке. Вначале в данном отношении делится диагональ трапеции, а затем это отношение переносится на другую ее сторону. Соединив полученную точку с данной, получаем искомую прямую (красная).

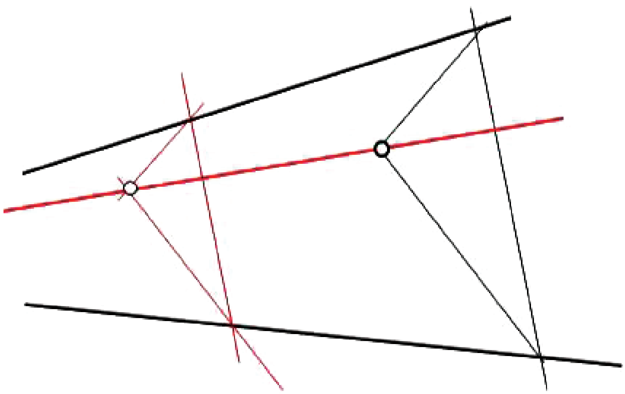


Рис. 2.3.1.2

Для построения прямой, проходящей через заданную точку и недоступную точку схода, обычно используют алгоритм подобных треугольников. Соответственные стороны этих треугольников параллельны и пересекаются в трех точках, принадлежащих одной бесконечно удаленной прямой. Таким образом, имеет место гомология, где осью является бесконечно удаленная прямая, а центром – недоступная точка схода. Следовательно, задача сводится к построению двух гомологичных треугольников, частным случаем этой задачи и является метод подобных треугольников *(рис. 2.3.1.2)*.

В общем случае за ось гомологии может быть принята любая прямая плоскости, не совпадающая с заданными прямыми и не проходящая через заданную точку. Один из вариантов показан на *рис. 2.3.1.3*. Заданные прямые и точка выделены утолщенными черными линиями, ось гомологии – зеленым цветом.

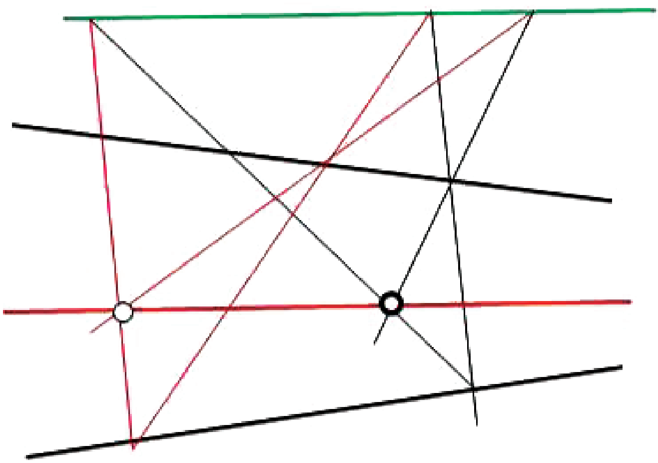


Рис. 2.3.1.3

Задача может быть решена и на основании теоремы о пересечении высот треугольника в одной точке. Из заданной точки опускаются перпендикуляры на обе заданные прямые. Вершины перпендикуляров определяют третью сторону треугольника, к которой проводится перпендикуляр из заданной точки, проходящий через третью вершину треугольника (точку схода) *(рис. 2.3.1.4)*.

На основании той же теоремы можно построить перпендикуляр к заданной прямой из недоступной точки.

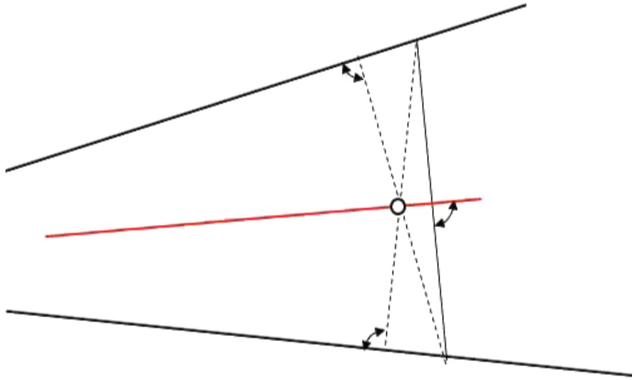


Рис. 2.3.1.4

На практике очень часто встречается ситуация, когда параллельные стороны перспективного изображения квадрата или прямоугольника пересекаются в недоступных точках схода. В этом случае для выполнения различных дальнейших построений рекомендуется изначально построить две средние линии, проходящие через точку пересечения диагоналей и параллельные сторонам.

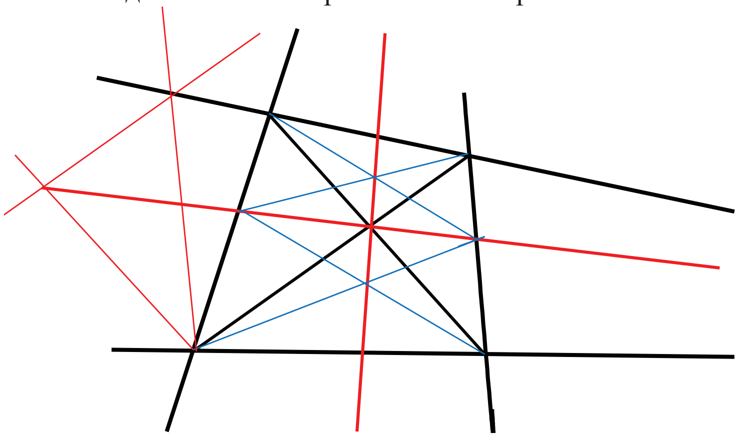


Рис. 2.3.1.5

Для решения задачи достаточно через точку пересечения диагоналей провести прямую в недоступную точку схода каким-либо из рассмотренных выше способов. Вторая средняя линия может быть построена при помощи первой центральной линии, как показано на *рис. 2.3.1.5*.

В приведенном примере для построения средней линии применен метод подобных треугольников с параллельными сторонами.

Как было показано выше, задача может быть решена построением двух гомологичных треугольников относительно произвольно заданной оси гомологии *(рис. 2.3.1.6)*.

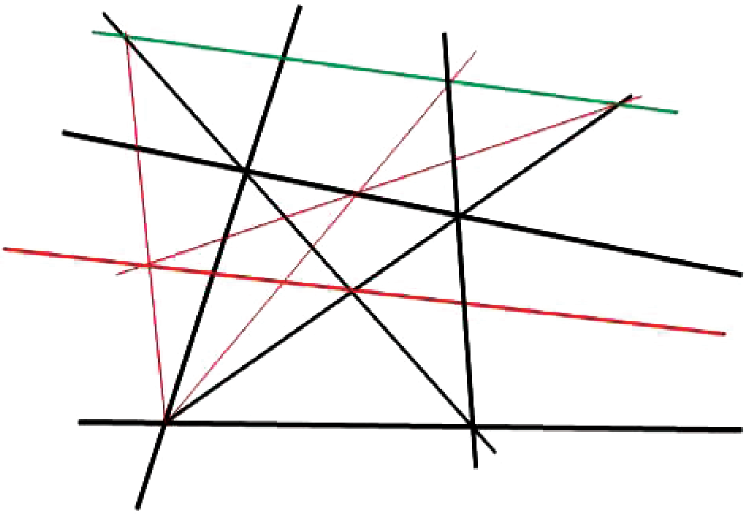


Рис. 2.3.1.6

Средние линии позволяют очень просто и эффективно проводить прямые в недоступные точки схода.

Как видно из рисунка, на основании заданного четырехугольника, в котором построены средние линии, можно построить бесчисленное количество параллельных и перпендикулярных линий. На *рис. 2.3.1.7* две построенные линии выделены красным.

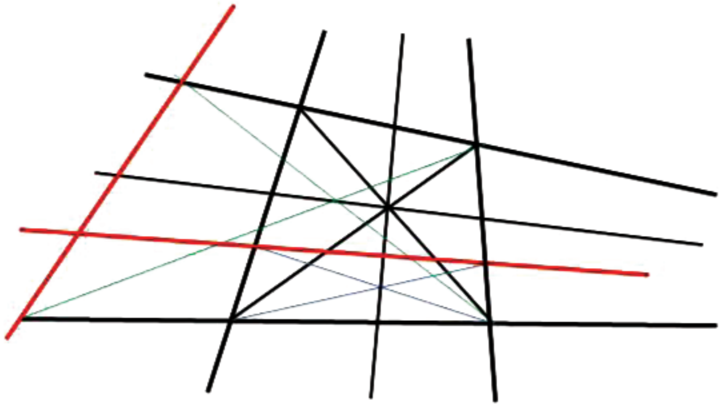


Рис. 2.3.1.7

В общем случае задача сводится к построению точки, являющейся гомологичной данной при недоступном центре гомологии. При необходимости все построения могут быть выполнены внутри заданного четырехугольника.

2.3.2. Основная теорема перспективы

Выше было показано, что если на плоскости имеется перспективное изображение куба, произвольным образом расположенного относительно картинной плоскости, то тем самым перспектива задана. Опираясь на это изображение как на координатную систему, можно построить в заданной перспективе изображение любого объекта.

Если известна главная точка картины, то достаточно задать проекцию одного из ребер куба, чтобы построить проекции остальных ребер. Отмеченное свойство позволяет сформулировать основную теорему перспективы.

Перспектива куба на плоскости может быть задана тремя произвольными осями, соответствующими трем смежным ребрам куба. На каждой оси произвольным образом назначается проекция бесконечно удаленной точки, и на одной из осей указывается проекция единичного отрезка (ребро куба).

Проекции единичных отрезков по двум оставшимся осям находятся построениями, показанными на *рис. 2.3.2.1*.

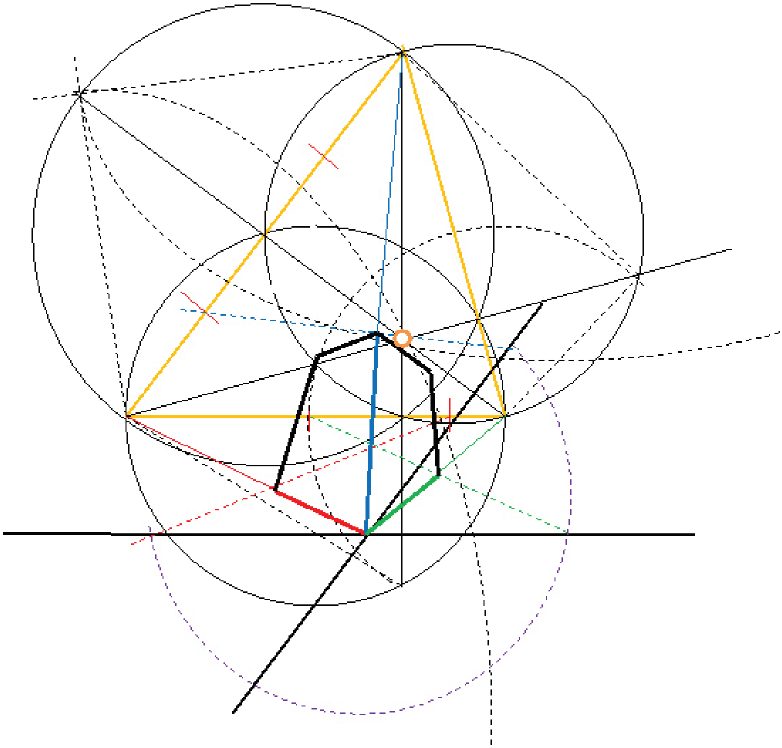


Рис. 2.3.2.1

На рисунке произвольным образом заданы три координатных оси (красная, синяя и зеленая). На каждой из осей произвольно назначена проекция бесконечно удаленной точки. Эти три точки образуют проекцию бесконечно удаленного треугольника (желтый). На красной оси утолщенной линией показана произвольно заданная проекция единичного отрезка.

Единичные отрезки по синей и зеленой осям не могут быть назначены произвольно и находятся построением (например, при помощи дистанционных окружностей). Главная точка картины (оранжевая) находится на пересечении высот желтого треугольника. Следует помнить, что чем дальше главная точка отстоит от центра изображаемого объекта, тем сильнее его искажения на картине.

2.4. Коники

Кониками, или кривыми второго порядка, или коническими сечениями, называют кривые, которые образуются при центральном проецировании окружности на плоскость. В зависимости от взаимного расположения окружности и проекционного аппарата проекцией окружности может быть окружность, эллипс, парабола или гипербола.

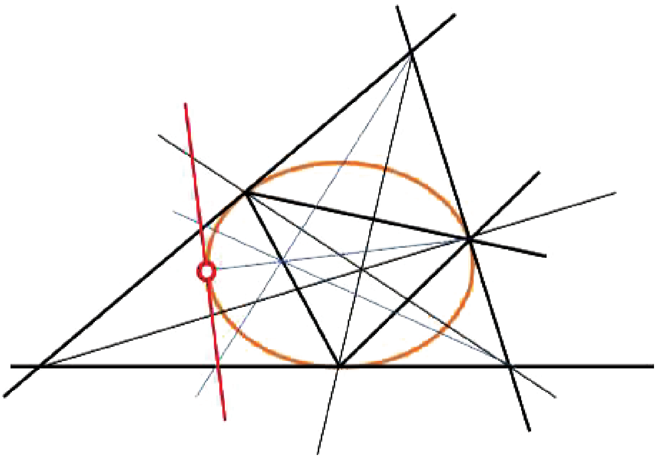


Рис. 2.4.1

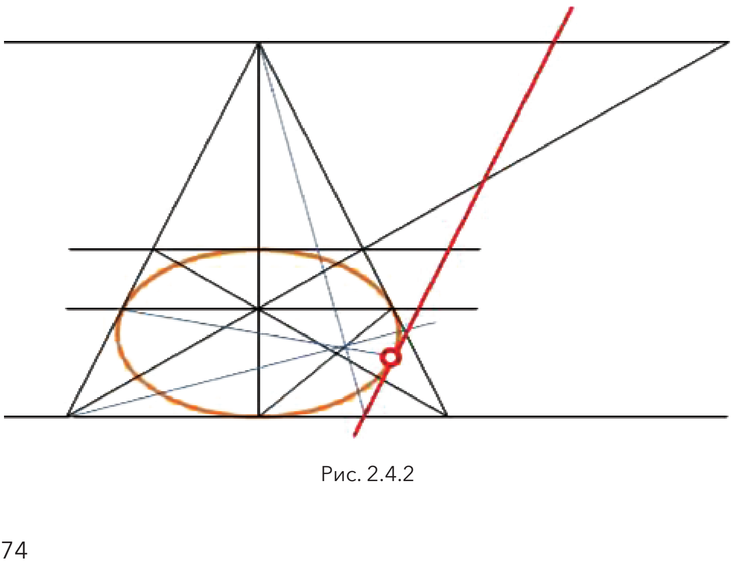


Рис. 2.4.2

Простейшим и наиболее универсальным методом построения любой из этих кривых является метод описанного и вписанного треугольника.

Если в произвольном треугольнике задать произвольную точку, не принадлежащую его сторонам, то, соединив эту точку с вершинами треугольника и найдя точки пересечения полученных прямых с противоположными сторонами треугольника, получим три точки. Эти точки являются вершинами треугольника, вписанного в заданный треугольник.

На *рис. 2.4.1* черными утолщенными линиями показаны два треугольника – вписанный и описанный. Построение касательной и точки, принадлежащих кривой, определяемой данными треугольниками, сводится к выбору произвольной точки на одной из сторон вписанного треугольника и проведению через эту точку трех прямых. На *рис. 2.4.2* показана реализация этого алгоритма в перспективе.

III. ПРОЕКЦИОННЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Принципиальное различие между перспективными и рельефными изображениями состоит в том, что в первом случае осуществляется отображение (проецирование) трехмерного пространства на двумерную картинную плоскость или иную поверхность, а во втором – трехмерное пространство отображается также на трехмерное пространство, определенным образом деформированное.

Если в исходном (отображаемом, реальном) трехмерном пространстве используется равномерная шкала измерений, то в рельефном (отображенном, перспективном) пространстве эта шкала становится перспективной. Следовательно, рельеф можно считать трехмерной (объемной) перспективой, где бесконечное реальное пространство отображается на область пространства, ограниченную глубиной рельефа. Иначе можно сказать, что в качестве картины здесь выступает трехмерное пространство.

Сказанное в полной мере относится и к театральным декорациям. Но если глубина рельефного изображения, как правило, много меньше его ширины, то глубина сценической перспективы может и превосходить ее ширину. Теоретические основы построения рельефной и сценической перспективы абсолютно одинаковы.

Построение перспективного трехмерного изображения во многом аналогично построению плоской перспективы. Различие лишь в том, что вместо картинной плоскости используется трехмерное картинное пространство.

Общий принцип построения трехмерной перспективы чрезвычайно прост. Необходимо в трехмерном пространстве задать центр проецирования (точку зрения) и четыре произвольных прямых, проходящих через этот центр. При этом никакие три прямые не должны лежать в одной плоскости. На каждой прямой произвольно назначаем пару точек. В каждой паре одна точка принадлежит отображаемому (реальному) пространству, а другая – картинному. Иначе можно сказать, что на каждом из четырех боковых ребер произвольной четырехгранной пирамиды необходимо произвольным образом назначить по две точки.

Следует отметить, что никакие четыре точки, принадлежащие одному из пространств, не должны лежать в одной плоскости, в противном случае пространственная перспектива превращается в плоскую.

Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множествами точек двух трехмерных пространств. Если одно из пространств принять в качестве исходного (реального), а другое в качестве картинного, то любой точке исходного пространства будет соответствовать единственная точка картинного пространства и обратно.

Четыре пары соответственных точек, если их соединить, определяют шесть пар соответственных прямых. Эти соответственные прямые пересекаются в шести точках, принадлежащих одной плоскости. Эта плоскость является тождественной, все ее точки принадлежат одновременно обоим пространствам. Следовательно, тождественная плоскость есть не что иное, как пересечение (общая часть) двух совмещенных трехмерных пространств – реального и картинного.

Отмеченное свойство позволяет значительно упростить способ задания трехмерной перспективы. Достаточно задать центр проецирования (точку зрения), тождественную плоскость и пару соответственных точек, лежащих на прямой, проходящей через центр проецирования. После чего для любой точки реального (исходного) пространства может быть найдена единственная соответствующая ей точка картинного пространства и обратно.

На *рис. 3.1* схематически представлен алгоритм такого построения. Заданы центр проецирования $S_1 \equiv S_2$ (точка зрения), тождественная плоскость $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ и пара соответственных точек $A_1 – A_2$, лежащих на двойной прямой $k_1 \equiv k_2$, проходящей через центр проецирования. B_1 – точка реального пространства, для которой необходимо построить соответствующую ей точку B_2 картинного пространства. Индексы указывают на принадлежность элемента тому или другому пространству.

Здесь следует отметить, что все точки и прямые, лежащие в тождественной плоскости, являются тождественными. Прямые, проходящие через центр проецирования, также принадлежат одновременно обоим пространствам, но тождественных точек на них только две: центр проецирования и точка пересечения с тождественной плоскостью. По этой причине будем называть такие прямые не тождественными, а двойными.

Через точки B_1, A_1 проводим прямую m_1 до пересечения с тождественной плоскостью $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Полученную тождественную точку $L_1 \equiv L_2$ соединяем с точкой A_2, что дает прямую m_2, соответствующую m_1. Соединив точку B_1 с центром $S_1 \equiv S_2$, получаем прямую $h_1 \equiv h_2$. Искомая точка B_2 должна лежать и на m_2, и на h_2, следовательно, лежит на пересечении этих двух прямых.

Символически данный алгоритм может быть представлен в виде:

$$B_1 \cap A_1 \equiv m_1 \cap (\alpha_1 \equiv \alpha_2) \equiv (L_1 \equiv L_2) \cap A_2 \equiv m_2$$
$$(S_1 \equiv S_2) \cap B_1 \equiv (h_1 \equiv h_2) \cap m_2 \equiv B_2.$$

Символы $B_1 \cap A_1$ или $(S_1 \equiv S_2) \cap B_1$ следует понимать не как пересечение двух точек, а как пересечение двух множеств прямых, проходящих через эти точки [7]. Прямая, проходящая через эти точки, принадлежит обоим множествам прямых и, следовательно, является пересечением этих множеств.

Так как значение m_2 встречается и в верхней, и в нижней строке, то алгоритм может быть записан в одну строку:

$$B_1 \cap A_1 \equiv m_1 \cap (\alpha_1 \equiv \alpha_2) \equiv (L_1 \equiv L_2) \cap A_2 \equiv m_2 \cap [(S_1 \equiv S_2) \cap B_1 \equiv (h_1 \equiv h_2)] \equiv B_2.$$

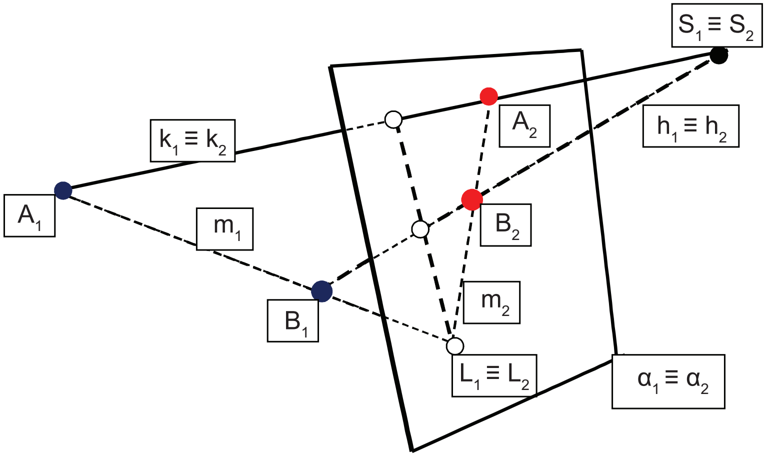


Рис. 3.1

Как следует из приведенной схемы, совершенно безразлично, где назначить пару соответственных точек – по одну или по обе стороны от тождественной плоскости. Алгоритм нахождения прочих соответственных точек остается неизменным. Теоретически любую точку, где бы она ни находилась, можно отнести либо к отображаемому, либо к отображенному пространству и построить ей соответственную подобно тому, как на плоскую картину с равным успехом можно спроецировать точки, находящиеся и перед зрителем, и за его спиной.

На практике объемное изображение строится только в части пространства, ограниченной глубиной рельефа или сцены. При этом отображается только та часть реального пространства, которая находится перед зрителем за тождественной плоскостью. По этой причине далее будем рассматривать построения только для этой части отображаемого пространства.

Объемную перспективу теоретически можно наглядно реализовать внутри какого-либо прозрачного материала, который будет играть роль картинного пространства. Для этого необходим материал, любые участки в объеме которого могли бы по нашему желанию становиться непрозрачными или цветными, а также технология, позволяющая это осуществлять. Тогда не будет существовать никаких конструктивных ограничений, имеющих место при моделировании трехмерных объектов на материальных объемных конструкциях, станет возможным объемное (трехмерное и многомерное) черчение и рисование внутри прозрачного материала (объемная живопись).

Неуправляемая реализация объемной картины наблюдается, например, в спокойной воде, если туда капнуть чернил или краски. Изображение можно даже зафиксировать, заморозив воду.

3.1. Рельеф и круглая скульптура

Так как выбор пары соответственных точек является совершенно произвольным, точка, принадлежащая реальному пространству, всегда может быть назначена бесконечно удаленной. В этом случае плоскость, параллельная тождественной плоскости и проходящая через точку картинного пространства, соответствующую бесконечно удаленной точке пространства реального, также соответствует бесконечно удаленной плоскости реального пространства.

Такая плоскость называется *предельной*. Любой точке этой плоскости будет соответствовать бесконечно удаленная точка исходного (реального) пространства.

Таким образом, для задания пространственной перспективы достаточно задать точку зрения (центр проецирования) и пару параллельных плоскостей: тождественную и предельную. Расстояние между тождественной и предельной плоскостями определяет глубину рельефного или сценического пространства. Обычно тождественная плоскость располагается ближе к зрителю, а предельная – дальше.

На *рис. 3.1.1* представлен один из простейших возможных алгоритмов такого построения.

Построение осуществляется на основе двух ортогональных проекций. Для упрощения построений тождественная и предельная плоскости назначены перпендикулярно фронтальной и горизонтальной плоскостям проекций. Следовательно, они проецируются на эти плоскости в виде двух профильных прямых.

Тождественная плоскость $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ показана на чертеже утолщенной черной линией, предельная плоскость β_2 выделена зеленым цветом. Этой предельной плоскости в реальном отображаемом пространстве соответствует бесконечно удаленная плоскость β_1.

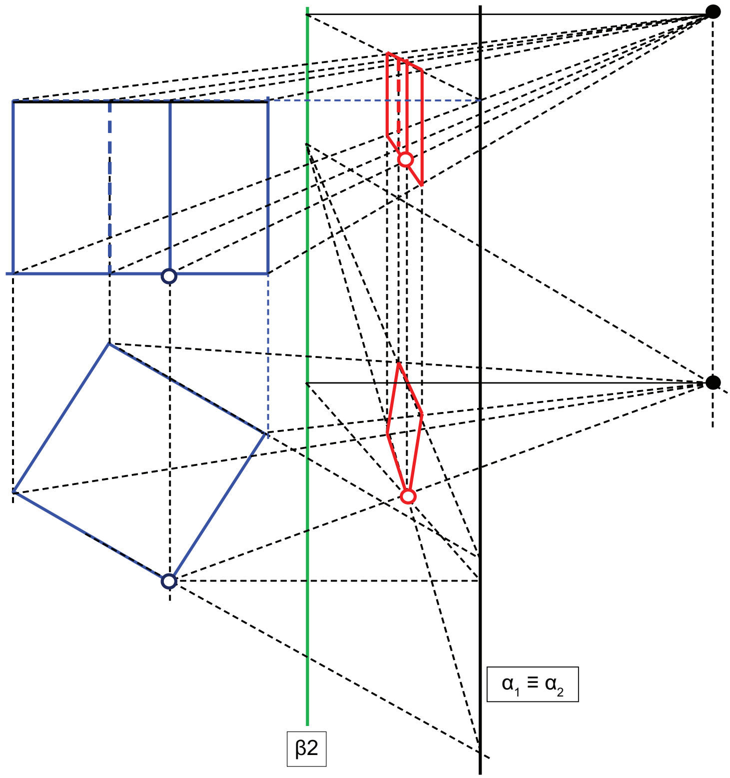


Рис. 3.1.1

Синим цветом показаны две ортогональные проекции куба, произвольным образом развернутого относительно плоскости рельефа. На рисунке показано два способа построения для одной точки. Все остальные точки находятся аналогично.

В результате построений получаем две ортогональные проекции исходного куба в рельефном пространстве (показано красным цветом). По полученным проекциям объект может быть воплощен в материале, как это делается по обычному чертежу.

Рельефные изображения более чувствительны к изменению положения зрителя относительно рельефного пространства, нежели плоскостные. Рельеф, построенный для одной точки зрения, с другой точки может вообще не восприниматься как осмысленное изображение. По этой причине построение рельефного изображения с одной точки зрения приемлемо только в том случае, если предполагается, что он будет рассматриваться с точек, близких к избранной точке зрения.

Если рельеф имеет большую протяженность (например, фриз), то построение его с одной точки зрения совершенно недопустимо. В этом случае следует осуществлять построения из множества точек зрения, расположенных на прямой вдоль фриза, на расстоянии, с которого изображение будет рассматриваться. Если предполагаются и вертикальные перемещения зрителя, то множество точек зрения может образовывать плоскость, параллельную плоскости изображения.

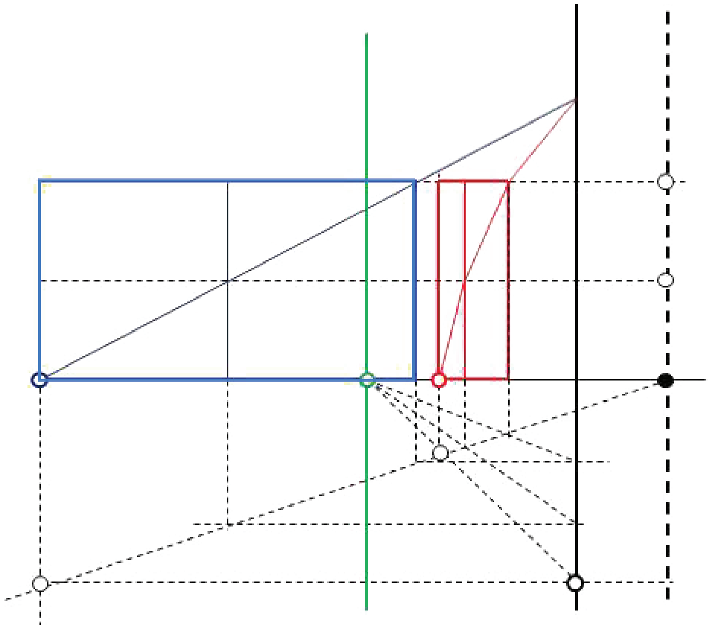


Рис. 3.1.2

На *рис. 3.1.2* показано построение рельефного изображения такого типа в плане. Тождественная плоскость выделена утолщенной черной линией, а предельная плоскость – зеленой. Изображаемый объект выделен синим, его рельефное изображение – красным. Утолщенной пунктирной прямой показано положение множества точек зрения (линия зрения).

При этом способе построения реальная и перспективная точки всегда находятся на перпендикуляре к тождественной плоскости. Пересечение этого перпендикуляра с линией зрения определяет точку зрения, относительно которой определяется положение перспективной точки. Алгоритм нахождения этой точки по глубине аналогичен алгоритму, представленному на *рис. 3.1.1*. Различие в том, что затем найденная точка проецируется на перпендикуляр параллельно тождественной плоскости, что дает искомую точку. Все остальные точки выстраиваются аналогично.

При центральном проецировании (из одной точки) по мере удаления объекта от зрителя все три его измерения подвергаются перспективным сокращениям. В данном примере перспективные сокращения происходят только по глубине: ширина и высота объекта остаются неизменными (при значительной высоте фриза имеет смысл применить перспективные сокращения и по высоте).

Важно отметить, что при таком способе построения прямолинейность сохраняется только для прямых, параллельных или перпендикулярных тождественной плоскости. Все остальные прямые отображаются в виде кривых.

На *рис. 3.1.2* показано построение рельефного изображения прямоугольника. Видно, что вертикальная средняя линия этого прямоугольника не является средней линией на его рельефном отображении. Следовательно, и линия, соответствующая его диагонали, не может быть прямой. На рисунке диагональ продлена до пересечения с тождественной плоскостью. Соответствующая ей кривая линия на рельефе изображена в виде ломаной линии, соединяющей 4 построенные точки. Количество точек может быть произвольно увеличено, и кривая будет построена более точно. На практике участки кривых, отображающих прямые линии, следует спрямлять.

Следует обратить внимание на то, что рельефное пространство в данном случае представляет собой наглядный пример искривленного трехмерного пространства. Следовательно, представления об искривленных пространствах могут находить применение не только в науке, но и в искусстве.

Часто встречаются рельефные изображения на округлых поверхностях, выпуклых или вогнутых (вазы, колонны, ниши и т. д.). Эти изображения предназначены для восприятия с различных точек зрения. Зачастую предполагается даже круговой обзор. Множество таких точек зрения может образовывать линию, поверхность и даже некоторый объем.

Ко всем этим случаям в принципе применим метод, рассмотренный выше. Рельефное пространство, заключенное между тождественной и предельной плоскостями, изгибается соответственно форме поверхности, и построение осуществляется по алгоритму, показанному на *рис. 3.1.2*.

3.2. Сценическая перспектива

Алгоритм построений сценической перспективы полностью аналогичен рельефному и не требует дополнительных пояснений.

На *рис. 3.2.1* показано построение ортогональных проекций (разрез и план) сценической объемной перспективы прямоугольного помещения, в котором имеется цилиндрическая колонна. Заданное помещение выделено синим цветом, а результат построения – красным. Чертеж настолько прост, что практически не требует пояснений. Точка зрения S (выделена черным) размещается примерно в центре зрительного зала на высоте глаз сидящего зрителя. Тождественная плоскость совпадает с рампой сцены. Плоскость задника сцены соответствует дальней стене изображаемого помещения.

Таким образом, имеются центр проецирования, тождественная плоскость и пара соответственных плоскостей. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками реального и перспективного пространства.

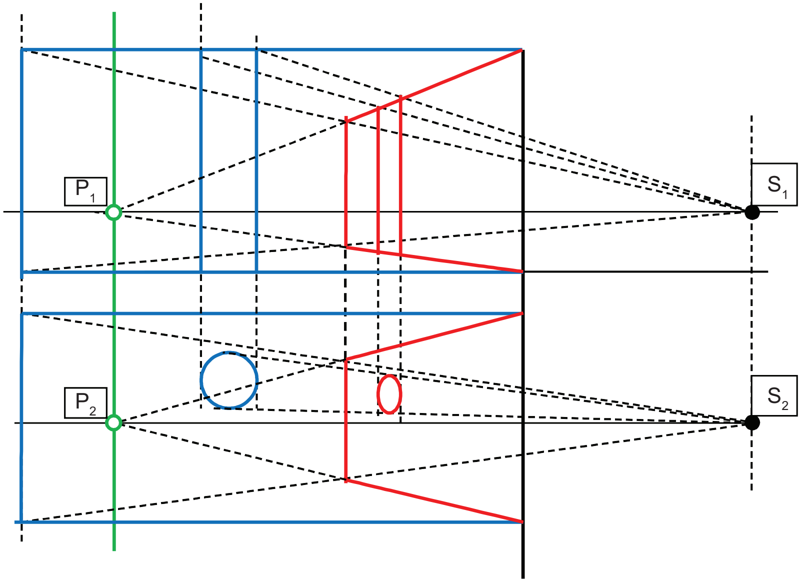


Рис. 3.2.1

В результате пространственных перспективных преобразований помещение в форме параллелепипеда преобразуется в четырехгранную усеченную пирамиду. Пересечение продолжений боковых ребер этой пирамиды (вершина) дает главную точку схода *P* сценической перспективы. Этой точке в реальном пространстве соответствует бесконечно удаленная точка. Вертикальная плоскость, проходящая через главную точку, является предельной (выделена зеленым цветом). Предельной плоскости сценического пространства соответствует бесконечно удаленная плоскость реального пространства.

В исходном (реальном) помещении, представленном на чертеже и выделенным на чертеже синим, имеется круглая цилиндрическая колонна. На сценической перспективе ей соответствует эллиптический цилиндр.

Положение главной точки определяется выбором точки зрения и глубиной сцены. Если декорация изображает не ограниченное пространство комнаты или зала, а бесконечный пейзаж, то главную точку следует размещать в плоскости задника сцены.

Как уже отмечалось, объемная перспектива более чувствительна к местоположению зрителя, нежели плоскостная.

Для зрителя, находящегося в непосредственной близости от выбранной точки зрения, визуально отличить реальность от ее объемного перспективного отображения практически невозможно.

К сожалению, нельзя разместить всех зрителей вблизи одной точки зрения. Чем дальше от этой точки находится зритель, тем меньше для него перспективный эффект декораций и тем более неестественными кажутся перспективные искажения.

По этой причине построения не всегда должны быть строго герметичными, но необходимо вносить поправки с учетом размеров и формы зрительного зала и сцены.

Одним из таких решений может быть прием построения компромиссной перспективы для нескольких точек зрения. Алгоритм этого построения состоит в том, чтобы построить изображения для нескольких точек зрения, а затем по тем или иным параметрам перейти к некоему усредненному изображению. Последнее уже целиком зависит от знаний, опыта и таланта художника.

IV. НЕЛИНЕЙНАЯ ПЕРСПЕКТИВА

Перспективное изображение может быть построено не только на плоскости, но и на любой другой поверхности. В этом случае прямые линии проецируются на картинную поверхность не обязательно в виде прямых, но в зависимости от поверхности принимают самые причудливые очертания.

Примером таких изображений являются световые шоу, когда изображения проецируются на фасады зданий. Эти фасады зачастую имеют очень сложную поверхность, но если зритель находится вблизи проекционного аппарата, то форма фасада не имеет никакого значения – изображение воспринимается как спроецированное на плоскость. Чем дальше от центра проецирования находится зритель, тем сильнее заметны искажения. Как и объемная перспектива, нелинейная более чувствительна к положению зрителя, нежели плоскостная линейная.

Чаще всего в качестве картинных поверхностей при построении нелинейной перспективы используются цилиндрические и сферические поверхности (панорамы, купола, планетарии). Во всех случаях предполагается, что зритель будет рассматривать эти изображения с определенных точек зрения.

Принцип построения нелинейной перспективы, как и линейной, состоит в нахождении точек пересечения проецирующих прямых с картинной поверхностью. Множество этих точек и формирует изображение.

На *рис. 4.1* показано построение перспективного изображения на цилиндрической картинной поверхности по двум ортогональным проекциям.

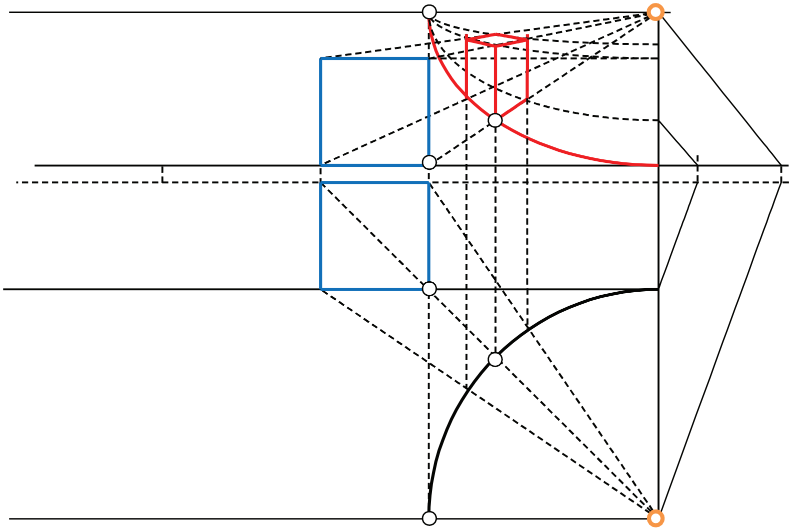


Рис. 4.1

При необходимости цилиндрическая поверхность может быть развернута в плоскость. Построение перспективы на сферической поверхности несколько сложнее, так как требует многократного решения задачи пересечения прямой со сферической поверхностью.

Нелинейная перспектива может быть получена и на плоской картине при проецировании нелинейным пучком прямых. Такое изображение можно увидеть, глядя на окружающий мир из-под воды.

V. ПЛОСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ

5.1. Плоские структуры

В XVIII в. Леонард Эйлер доказал теорему, согласно которой для любого простого многогранника, имеющего В вершин, Р ребер и Г граней, справедливо равенство:

$$В + Г - Р = 2. \tag{5.1.1}$$

Для доказательства Эйлер удалял одну из граней, а оставшуюся часть топологически совмещал с плоскостью внутри контура этой грани (или проецировал на эту грань). Затем полученная плоская сетка многогранников разбивалась на треугольники. Для треугольника имеет место равенство:

$$В + Г - Р = 1. \tag{5.1.2}$$

При добавлении любого количества треугольников к данному треугольнику количество вершин и граней с каждым шагом увеличивается на единицу, а ребер – на два. Если из плоской сетки треугольников удалять по одному, то с каждым шагом количество вершин и граней уменьшается на единицу, а количество ребер уменьшается на два. Следовательно, равенство (5.1.2) не изменяется и справедливо для любой плоской сетки треугольников.

Если при подсчете количества граней плоской сетки считать внешнюю область, окружающую эту сетку, за еще одну грань, то равенство (5.1.1) выполняется непосредственно.

Более того, в этом случае формула (5.1.1) справедлива не только для сетки, состоящей из граней, но и для любой плоской связной структуры (графа), содержащей хотя бы одну вершину.

Для графа, состоящего из одной вершины, имеем: В = 1, Р = 0, Г = 1, откуда 1 + 1 – 0 = 2. Добавляя к этой вершине любое количество вершин, ребер и граней, легко установить, что равенство всегда остается справедливым.

Формулу (5.1.1) удобнее представить в виде:

$$(В + Г) = (Р + 2) = Э, \tag{5.1.3}$$

где Э – некоторая численная характеристика данного графа (число Эйлера).

На *рис. 5.1.1* представлен граф из 7 вершин, 9 ребер и 4 граней (с учетом внешней). Причем в этом графе имеются ребра, не образующие граней (деревья, ветви), ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин (кратные), и ребро, замкнутое на одну вершину (петля). Тем не менее равенство остается справедливым 7 + 4 = 9 + 2 = 11.

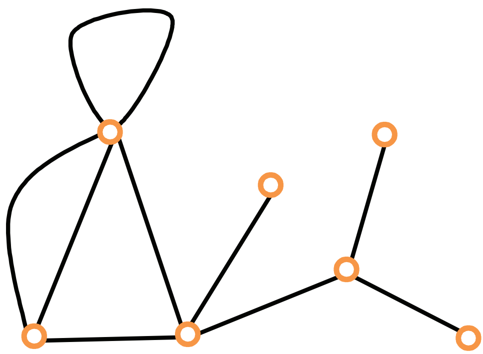


Рис. 5.1.1

Любую плоскую структуру, будь то план квартиры, генплан города, транспортная сеть, художественная композиция и т.д., можно рассматривать как некий плоский граф, для которого справедливо равенство (5.1.3).

В качестве примера рассмотрим схему Санкт-Петербургского метрополитена на 2019 г. Она состоит из 5 линий, 7 пересадочных и 9 конечных станций *(рис. 5.1.2)*.

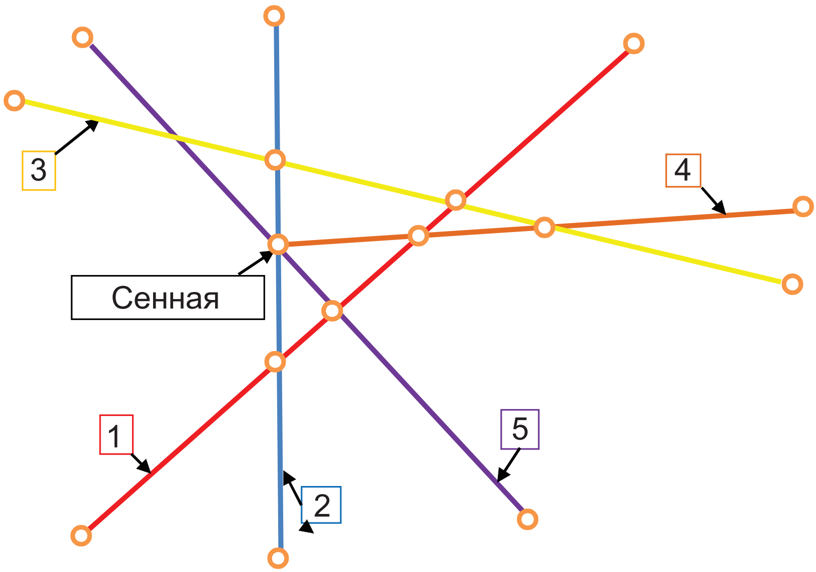


Рис. 5.1.2

Для упрощения расчетов промежуточные станции учитывать не будем. Данная структура содержит 16 вершин (станций), 19 ребер (ребро –линия, соединяющая две вершины) и 5 граней (с учетом внешней). Подставляя данные значения в формулу (5.1.3), имеем: $16 + 5 = 19 + 2 = 21$. Отметим, что линии 3 и 5 (желтая и фиолетовая) не имеют общей пересадочной станции, следовательно, вершин и граней не образуют.

Несложно убедиться, что при дополнении данной схемы любым количеством линий, промежуточных и пересадочных станций равенство (5.1.3) остается справедливым.

5.2. Пространственные структуры

Рассмотренный выше подход можно перенести и на трехмерные пространственные структуры. В этом случае к вершинам В, ребрам Р и граням Г добавляется еще один образ – пространство, или объем, П.

Простейшим пространственным объектом является тетраэдр, для которого В = 4, Р = 6, Г = 4. Тетраэдр является объемной фигурой и разделяет трехмерное пространство на две области – внутреннюю и внешнюю. Если учитывать оба эти пространства, то для тетраэдра, как и для любого простого многогранника, П = 2.

Тогда формула (5.1.3) приобретает вид:

$$(\text{В} + \text{Г}) = (\text{П} + \text{Р}) = \text{Э}. \tag{5.2.1}$$

Для тетраэдра имеем: $(4+4)=(2+6)=8$. Любой простой многогранник может быть разбит на тетраэдры, и при этом равенство (5.2.1) останется справедливым.

Например, куб имеет 8 вершин, 12 ребер, 6 граней и 2 пространства (внутреннее и внешнее). Подставляя эти значения в (5.2.1), имеем: $(8+6)=(2+12)=14$.

Если рассматривать многогранник как пространственный граф, состоящий из вершин, ребер, граней и пространств, то, последовательно удаляя или дополняя эти элементы, легко доказать, что уравнение (5.2.1) остается неизменным. Следовательно, эта формула справедлива не только для многогранников, но и для любой связной трехмерной пространственной структуры (или графа).

На *рис. 5.2.1* представлен пространственный граф, состоящий из тетраэдра (1), к которому присоединены два ребра – ветви (2); две поверхности, не образующие пространств, но образующие ребра: поверхность, присоединенная к одной вершине, – лист (3) и поверхность, присоединенная к одному ребру, – крыло (4); три поверхности, образующие пространства, но не образующие ребер: поверхность, замкнутая на одну вершину, – пузырь (5), поверхность, замкнутая на одно ребро, – кошелек (6) и поверхность, замкнутая на одну грань, – купол (7). На чертеже линии, показанные точками, являются огибающими поверхности и ребер не образуют.

Для данного графа В=6, Р=10, Г=9, П=5. Подставляя эти значения в формулу (5.2.1), имеем: (6+9)=(10+5)=15.

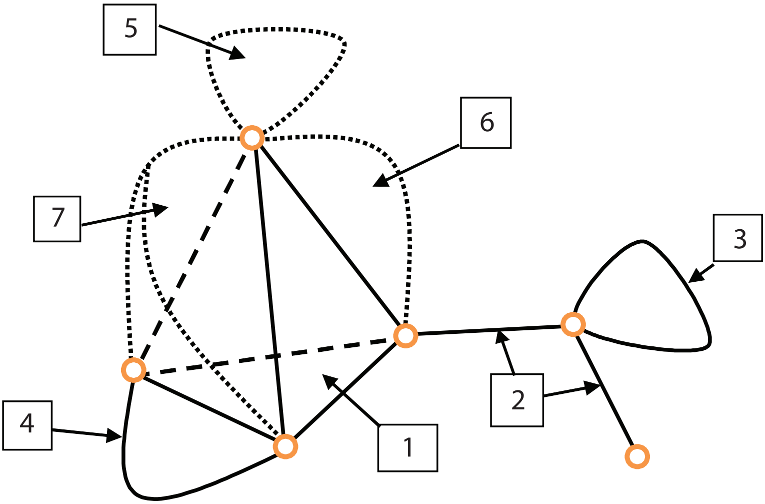


Рис 5.2.1

Интересно, что формула (5.2.1) справедлива для любого графа, отнесенного к трехмерному пространству, даже не образующего пространств.

Например, для трехмерного графа, состоящего из одной вершины, имеем: В=1, Р=0, Г=0, П=1, откуда (1+0)=(1+0)=1 и т.д.

Отметим, что формула Эйлера в обобщенном виде справедлива при отнесении ее к любому n-мерному пространству.

Рассмотренное свойство пространственной структуры может иметь и практические приложения. На *рис. 5.2.2* представлена аксонометрическая проекция некоторого прямоугольного объема (например, здания), разделенного горизонтальной плоскостью (перекрытием) на два этажа. Верхний этаж разделен вертикальной плоскостью (стеной) на две части.

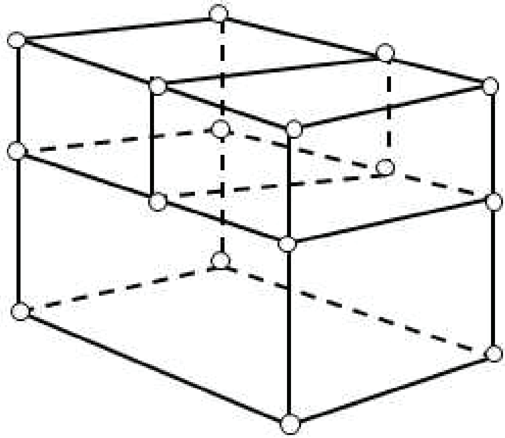


Рис. 5.2.2

Если рассматривать полученную структуру как пространственный (трехмерный) граф, состоящий из 16 вершин, 28 ребер, 16 граней и 4 объемов (пространств), то, подставляя эти значения в формулу (5.2.1), имеем: $16+16=28+4=32$.

Отмеченные свойства плоских и пространственных структур могут быть полезны при создании плоских и пространственных композиций с заранее заданными свойствами.

5.3. Теорема четырех красок

При раскрашивании географической карты для удобства восприятия всегда желательно, чтобы государства, имеющие общую границу, были окрашены в разные цвета. В процессе изготовления карт неожиданно выяснилось, что для раскрашивания любой карты достаточно всего 4 цветов. Следствием этого открытия является так называемая теорема четырех красок. Согласно этой теореме любая плоская планировочная структура может быть раскрашена четырьмя красками так, чтобы все смежные области (области, имеющие общую границу) были окрашены в различные цвета.

Три произвольные точки плоскости, соединенные какими-либо непересекающимися линиями (в частности, прямыми), образуют замкнутый контур. Этот контур делит плоскость на две области:

внутреннюю и внешнюю. Любая четвертая точка плоскости, не лежащая на линии, принадлежит либо внешней, либо внутренней области. Если все 4 точки соединить между собой, то получим конструкцию, состоящую из 3 точек, 6 линий и 4 областей (включая внешнюю) *(рис. 5.3.1)*.

На рисунке эта конструкция выделена черным цветом. Очевидно, что на плоскости соединить между собой линиями без пересечений можно не более четырех точек. Если к этой конструкции применить трехмерный принцип двойственности, где точке соответствует плоскость (область), а линии – линия, то получим двойственный граф, состоящий из четырех взаимно смежных областей (без учета внешней). Одна из областей всегда будет внутренней. Следовательно, на плоскости может существовать не более четырех взаимно смежных областей и для раскраски любой плоскостной композиции всегда будет достаточно четырех красок.

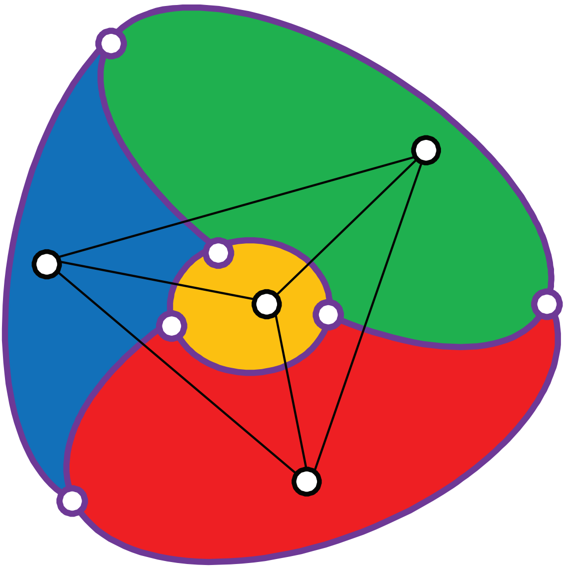


Рис. 5.3.1

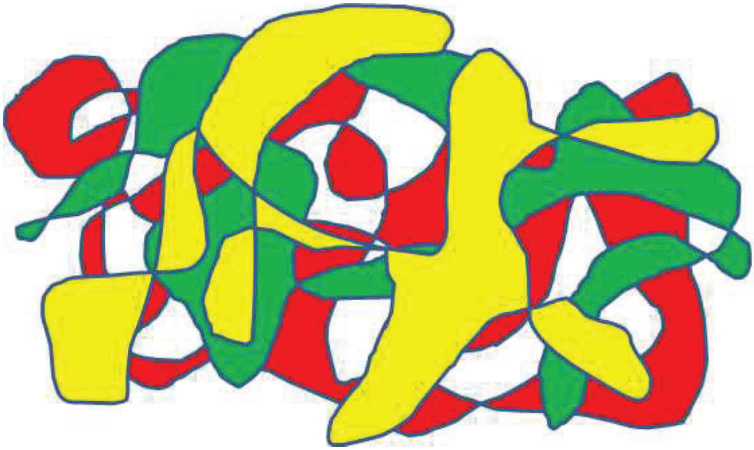


Рис. 5.3.2

На *рис. 5.3.2* представлена абстрактная композиция на плоскости, раскрашенная 4 цветами (белый, красный, зеленый, желтый) так, что смежные области имеют различные окраски.

Для художника знание этой теоремы позволяет предвидеть, что для раскрашивания любой композиции на плоской картине ему будет достаточно четырех красок (больше – сколько угодно).

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Александров П. С*. Введение в теорию множеств и общую топологию. М. : Наука, 1977. 368 с.

2. *Вальков К. И*. Введение в теорию моделирования. Л. : ЛИСИ, 1974. 86 с.

3. *Ворожищев Я. С*. Двойственные геометрические преобразования // Вестник гражданских инженеров. СПбГАСУ. 2014/1(42), февраль. С. 127–135.

4. *Ворожищев Я. С*. Перспектива как частный случай трехмерной коллинеации и основная теорема перспективы // Научные труды / Ин-т имени И. Е. Репина. Вып. 34 : Вопросы художественного образования. СПб. : Ин-т имени И. Е. Репина, 2015. С. 88–98.

5. *Ворожищев Я. С*. Пространства отрицательной размерности и пересечение как универсальное и единственное позиционное отношение. СПб. : Астерион, 2011. 36 с.

6. *Ворожищев Я. С*. Рельефная и сценическая перспектива // Научные труды / Ин-т имени И. Е. Репина. Вып. 38 : Вопросы художественного образования. СПб. : Ин-т имени И. Е. Репина, 2016. С. 86–97.

7. *Глаголев Н. А*. Проективная геометрия. М. : Высшая школа, 1963. 344 с.

8. *Климухин А. Г.* Начертательная геометрия. М. : Архитектура-С, 2007. 336 с.

9. *Короткий В.* А. Проективное построение коники : уч. пособ. Челябинск : изд. центр ЮУрГУ, 2010. 94 с.

10. *Макарова М. И*. Перспектива. М. : Академический проект, 2009. 477 с.
11. *Соболев Н. А*. Общая теория изображений. М. : Московский архитектурный институт, 2014. 672 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский государственный академический
институт живописи, скульптуры и архитектуры имени И. Е. Репина
при Российской академии художеств

Я. С. ВОРОЖИЩЕВ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ПОСТРОЕНИЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ И ИНЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Методические указания

Часть I

Подписано в печать 10.06.19. Тираж 100. Объем 4,6 уч.-изд. л. Заказ 2091.
Подготовлено и отпечатано в издательско-полиграфическом отделе
Института имени И. Е. Репина
Санкт-Петербург, Университетская наб., 17